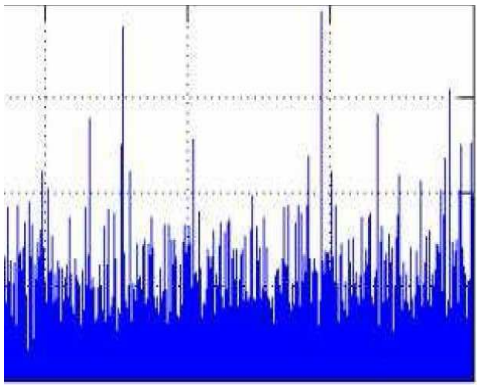
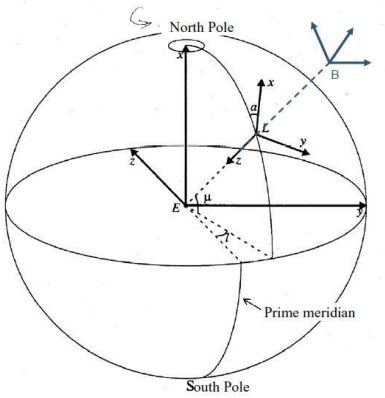
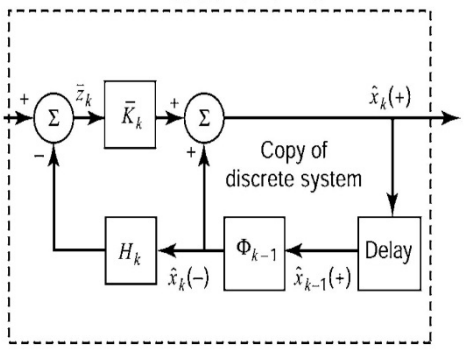
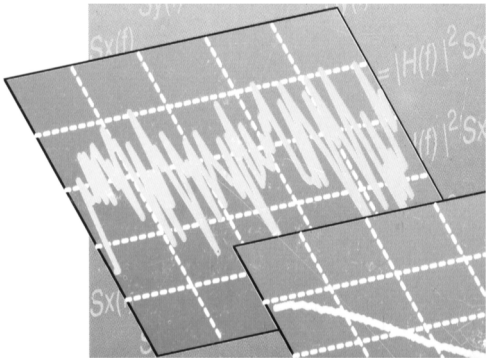





# L'estimateur de Kalman
# Appliqué à la navigation inertielle



# NOTIONS DE STATISTIQUES POUR L'ESTIMATION

## 1) Variable aléatoire

Si une grandeur ne peut être définie de façon certaine (ou déterministe), c'est-à-dire si la valeur ne peut être prédite précisément, on dit que l'on a affaire à une variable aléatoire x(ξ). ξ est une épreuve qui dénote les lois du hasard
Cette variable ne pouvant être définie de façon précise, il est néanmoins possible de définir ou de mesurer ses caractéristiques statistiques, comme sa valeur moyenne, son écart-type, etc.

### 1.1) Moyenne et espérance mathématique

Nous allons définir l'espérance mathématique de la variable $x_k$ : $E[x_k]$ comme étant la moyenne de $x_k$ à l'instant $t_k$.
Comme il n'est pas possible de calculer une moyenne avec la seule valeur $x_k$, il est nécessaire de disposer d'un nombre suffisant de réalisations de $x$ (ou d'échantillons) pour pouvoir calculer la moyenne de $x_k$ sur l'ensemble de ces réalisations.
On obtient alors :

$$E[x_k] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} xj_k$$ $xj$ étant la $jème$ réalisation de la variable $x$.

*Les variables aléatoires qui ont leur espérance mathématique nulle sont des variables centrées.*

### 1.2) Indépendance

Si deux variables aléatoires sont indépendantes c'est-à-dire si un phénomène n'influe pas sur le comportement de l'une sur l'autre alors :

$$E[x.y] = E[x].E[y]$$

### *1.3) Variance*

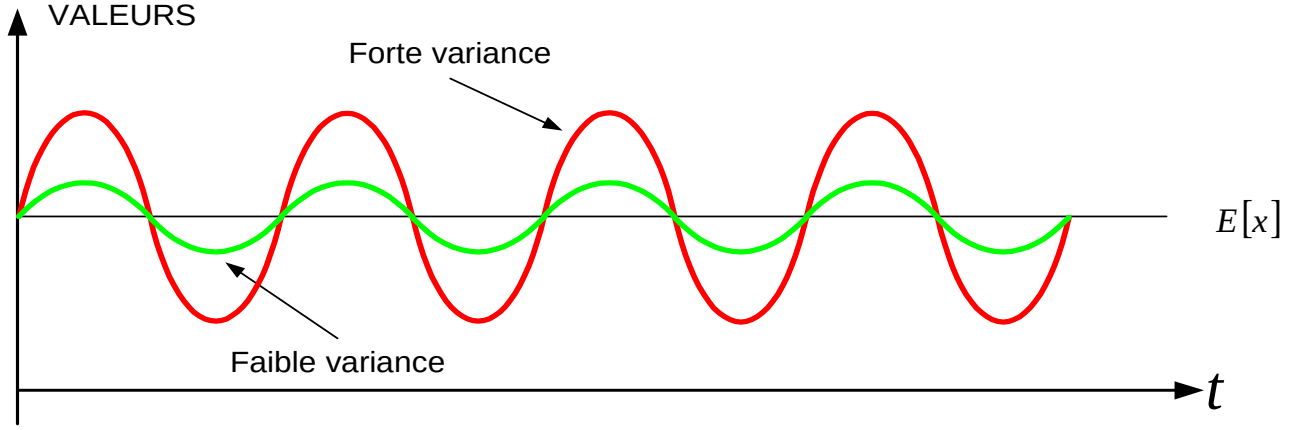
C'est une valeur numérique représentative de la dispersion des valeurs de la variable autour de son espérance (*moyenne des carrés, somme quadratique*).

$$V[x] = E\left[(x - E[x])^2\right]$$

Puisque $E[E[x]] = E[x]$ alors $\boxed{V[x] = E[x^2] - E[x]^2}$

Pour un vecteur centré $E[x] = 0$ alors $V[x] = E[x^2]$.

La variance permet de caractériser l'enveloppe globale de la variable.



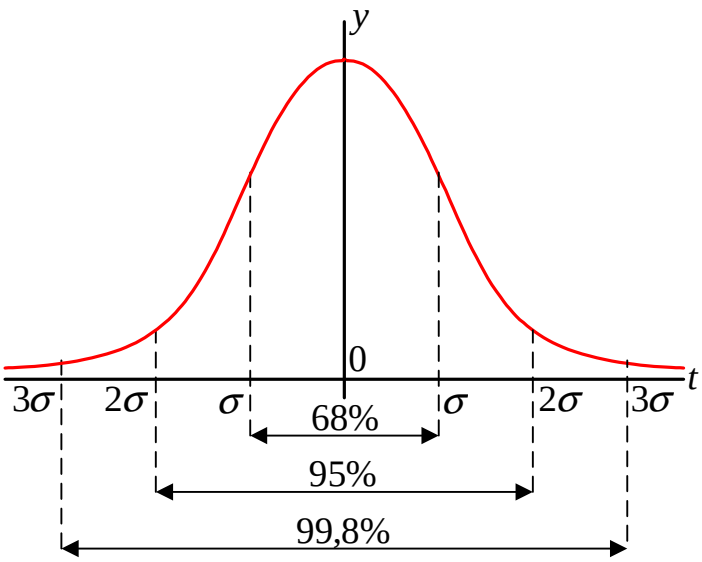
### *1.4)Ecart-type*

On définit ensuite l'écart type comme la racine carrée de la variance. On le note $\sigma$.

$$\sigma(x) = \sqrt{V[x]}$$

### *1.5) Variable aléatoire gaussienne*

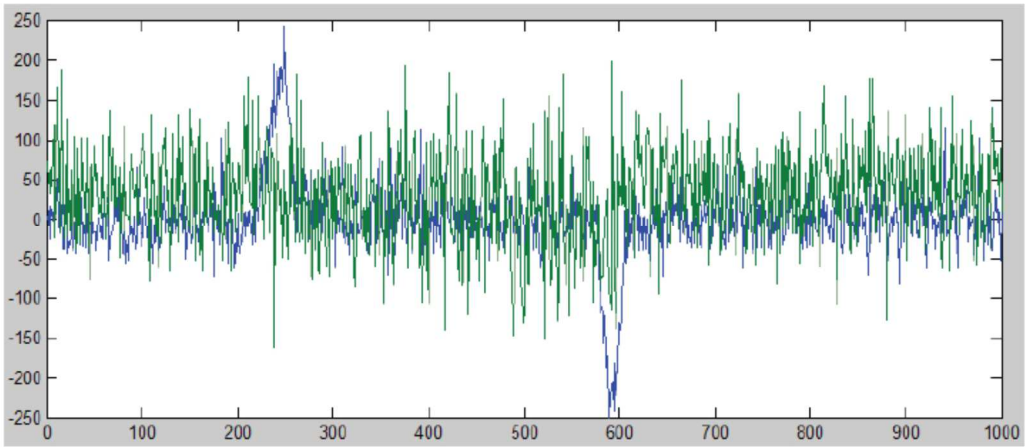
Le fait de connaître l'écart type et la moyenne d'une variable aléatoire ne suffit pas encore à la caractériser complètement. Prenons le cas d'une variable à moyenne nulle et dont l'écart type est égal à 1. il est possible d'avoir différents types de dispersion des valeurs de la variable autour de 0.
Une variable aléatoire gaussienne est une variable dont le type de dispersion est le plus proche de ce que l'on peut trouver dans la nature et qui est le fait du pur hasard. La loi de probabilité correspondante est appelée « **loi de gauss** » ou encore « **loi normale** ».
La densité de probabilité est définie par la classique « courbe en cloche » :




Pour une variable gaussienne, 68% des valeurs sont comprises entre $\pm$ l'écart type, 95% entre $\pm$ 2 sigma et 99,8% entre $\pm$ 3 sigma.
Nous supposerons par la suite que toutes les variables aléatoires rencontrées sont gaussiennes.

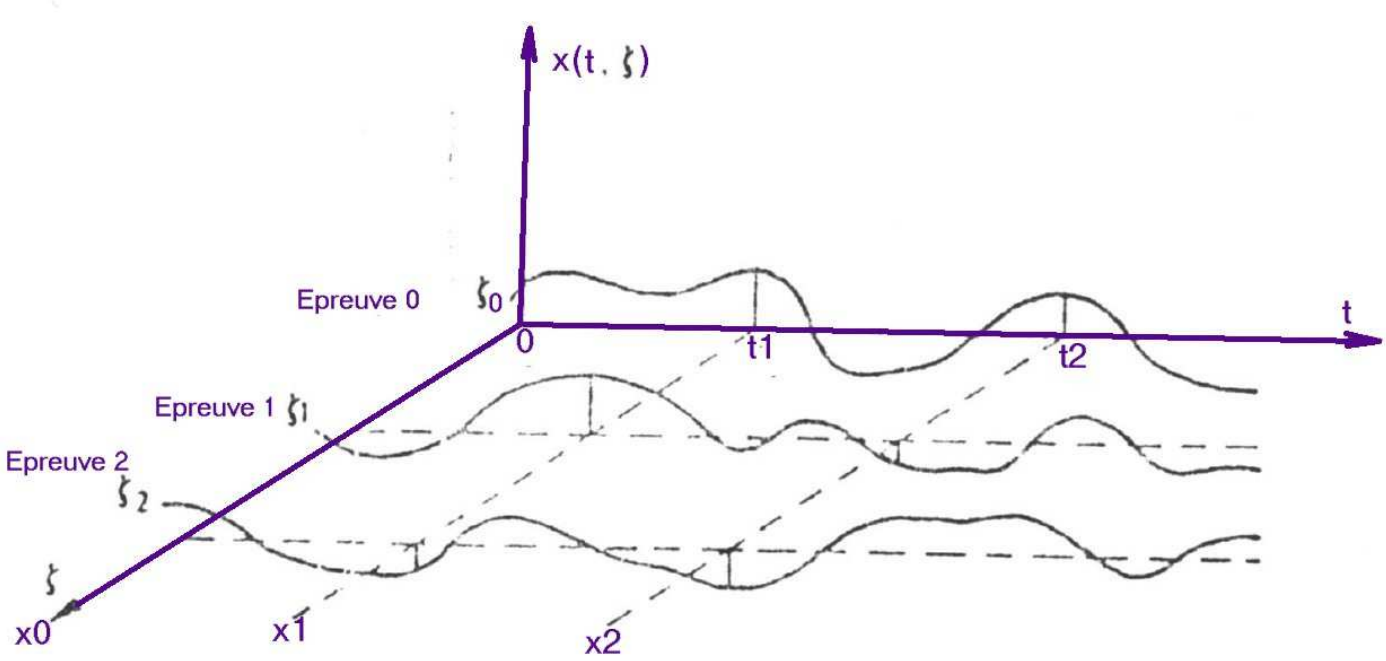
## 2) Le signal aléatoire

Le bruit et l'information sont de natures aléatoires. Ils se modélisent non pas simplement par une variable aléatoire mais par un processus aléatoire x(t,ξ). Il est important de connaitre les propriétés statistiques de ces signaux aléatoires que l'on traite afin d'avoir par la suite un estimateur optimal. Bien souvent l'information est noyée dans le bruit, comme le démontre l'information issue d'un accéléromètre.



Par définition un signal est aléatoire s'il dépend d''une certaine manière des lois du hasard. De tels signaux, dont la valeur instantanée est imprévisible, ne possèdent évidemment pas de représentations temporelles analytiques. Ils peuvent toutefois être caractérises par leurs propriétés statistiques et fréquentielles.

Si l'on considère k instants t0,t1,....., tk, on peut définir k variables x0,x1,.....,xk formant **un vecteur aléatoire** à k composantes x=(x1,x2,....., xk), caractérisé par une loi de probabilité conjointe p(x0,x1,.....,xk) à k dimensions. La connaissance de cette loi en fonction des paramètres t0, t1,....., tk constitue une statistique d'ordre k du processus.




Pratiquement, on peut généralement se contenter de la statistique d'ordre 1 et de celle d'ordre 2 qui permettent de caractériser suffisamment le comportement du processus et de préciser son évolution dans le temps.
On caractérise la statistique d'ordre 1 par des moyennes ou des variances sur k échantillons du signal (plutôt que par les fonctions de densité de probabilités). La relation entre deux échantillons *i* et *j* d'un signal aléatoire peut ainsi être caractérisée par la densité de probabilité conjointe p(x,y) ce que l'on appelle la *statistique d'ordre 2* du signal aléatoire. Comme On ne dispose que d'une réalisation ou épreuve (parole, image, signaux bio-médicaux), sur laquelle il faut mesurer des caractéristiques. On préfére caractériser la statistique d'ordre 2 par la *fonction d'autocorrélation* du signal ou par la transformée de Fourier de la fonction *d'autocorrélation* que l'on appelle la *densité spectrale de puissance*.

***Covariance***

Elle est notée $Cov(x,y)=Cov(y,x)$ et permet de caractériser l'état de dépendance de deux variables entre-elles.

$$Cov(x,y)=E[x.y]-E[x].E[y]$$

**Si les deux variables sont indépendantes** : $E[x.y]=E[x].E[y]$

alors $Cov(x,y)=E[x].E[y]-(E[x].E[y])=0$

Si X et Y sont indépendantes alors la covariance est nulle.

**Si les 2 variables sont liées** : $x \cong y$

alors $Cov(x,y)=E\left[x^2\right]-E[x]^2=V[x].$

La covariance évolue entre 0 et la variance et sert à qualifier le degré de dépendance entre $x$ et $y$.

## Coefficient de corrélation

Il est noté $\rho(x,y)$.

La variance d'un phénomène n'est pas forcément connue, d'où l'impossibilité de qualifier une covariance. Dans ce cas là, on parlera de coefficient de corrélation.

$$\rho(x,y)=\frac{Cov(x,y)}{\sigma(x).\sigma(y)}$$

**Si les deux variables sont indépendantes**

$$\rho(x,y)=\frac{0}{\sigma(x).\sigma(y)}=0$$

**Si les deux variables sont liées**

$$\rho(x,y)=\frac{V[x]}{\sqrt{V[x]}.\sqrt{V[x]}}=\pm 1$$

$\rho(x,y)$ varie de 0 à $\pm 1$.

Ces bornes étant des valeurs caractéristiques, l'opérateur peut donc qualifier la corrélation entre les deux variables.

***Bruit blanc gaussien***

Une variable aléatoire est un bruit blanc si c'est une variable aléatoire à moyenne nulle $E[X]=0$ et si ses différentes valeurs successives sont complètement décorrélées. Il est de plus gaussien s'il suit la loi normale.

***Variance d'un vecteur de variables aléatoires***

Soit $X$ un vecteur de variables aléatoires à moyennes nulles.

La variance de $X$ s'écrit : $E\left[X.X^T\right]$ avec $X^T$ : transposée de $X$, et elle correspond à une matrice carrée appelée **matrice de covariance**.

Cette matrice contient les variances de chaque composante de $X$, ainsi que les covariances des composantes entre elles.

$$X^T=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \qquad E\left[X.X^T\right]=\begin{pmatrix}E[x.x] & E[x.y] & E[x.z]\\ E[y.x] & E[y.y] & E[y.z]\\ E[z.x] & E[z.y] & E[z.z]\end{pmatrix}$$

La matrice de covariance est symétrique : $E[x.y]=E[y.x]$.

La diagonale de la matrice contient toutes les variances du vecteur les variances peuvent être considérées comme le bruit total du système ou comme la confiance totale accordée.

La covariance entre deux composantes décrit la corrélation entre ces composantes.

**APPLICATIONS AU FILTRE DE KALMAN**

Le grand attrait de la méthode de KALMAN est la possibilité de manipuler des systèmes stochastiques, c'est-à-dire dont l'évolution et l'observation sont dans une certaine mesure aléatoires. Le but recherché est de séparer l'information en écartant les termes d'erreur. Pour opérer cette discrimination c'est-à-dire pour remonter aux variables d'état $x$, en ne connaissant que les mesures $z$, KALMAN exploite les propriétés statistiques des bruits aléatoires. Il faut donc non seulement disposer d'un modèle du système dynamique (connaître les matrice A et C) mais également d'un modèle des bruits aléatoires (connaître les variances et covariances). Une mauvaise identification compromet fortement le résultat que l'on peut attendre de la méthode.

La méthode de représentation d'état n'engendre aucune perte d'information. C'est pourquoi, lors de la modélisation d'un système, il faut être exhaustif. Son seul inconvénient est la nécessité d'intégrer un calculateur performant pour gérer le calcul matriciel dans le cadre de systèmes complexes.

On voit ainsi les limitations pratiques de cette théorie mais aussi ses domaines d'application privilégiés. Il est plus facile de proposer une identification par un phénomène relevant de la balistique ou de la mécanique classique. C'est ainsi que les filtres de KALMAN se sont illustrés dans le domaine spatial (projet APOLLO), dans ceux du guidage de missiles, des conduites de tir, des radars, de la navigation aérienne et **sous-marine**.
Par contre, dans les domaines économiques et démographiques, l'utilisation de la théorie de KALMAN semble pour l'instant une vue de l'esprit.

# L'estimation

## 1) Principe

**L'estimation** est une branche des mathématiques statistiques qui permet, à partir de mesures effectuées sur un système, d'estimer la valeur de différents paramètres de ce système.
Bien sûr, il est possible de n'estimer qu'un seul paramètre, mais il vous est aussi possible d'estimer plusieurs paramètres en même temps. Dans ce cas, on ne parle plus de paramètre à estimer, mais **de vecteur à estimer, ou vecteur d'état.**
**Ce vecteur d'état est nommé X.**
Ce « vecteur d'état » représente et symbolise l'état du système à un instant précis. La variation de ce vecteur au cours du temps caractérise l'évolution de l'état du système, son « mouvement ».

Ce vecteur d'état pour la navigation inertielle peut être très complexe

$$X^T = (\ \underbrace{u\ v\ w}_{V}\ \ \underbrace{x\ y\ z}_{\Xi}\ \ \underbrace{q_0\ q_1\ q_2\ q_3}_{Q}\ \ \underbrace{\nu_p\ \nu_q\ \nu_r}_{\nu}\ \ \underbrace{\mu_x\ \mu_y\ \mu_z}_{\mu}\ \ ),$$

V est la vitesse dans les axes mobiles,
X est la position en coordonnées terrestres projetées à plat,
Q est le quaternion des attitudes, que l'on préfère aux angles d'Euler
v est le vecteur des biais gyrométriques,
μ est le vecteur des biais accélérométriques.

## 2) Le modèle d'état

La première chose pour trouver cet estimateur est de modéliser le système de façon linéaire grâce à des **équations d'états.**
Le système d'équation utilisé dans le modèle d'état repose sur la définition de deux modèles que sont **le processus** et **la mesure** (les modèles sont la représentation d'états d'un système dynamique). Il est utilisé pour estimer l'état d'un système dynamique, observé.

### 2.1) Le modèle du processus

Il décrit l'évolution de ce système dynamique est défini par l'équation d'état linéaire récursive suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t) \times x(t) + B(t) \times U(t) + v(t)$$

ou la forme discrète :

$$x_{k+1} = A_k \times x_k + B_k \times U_k + v_k$$

$x_k , x_{k+1}$ : sont des **paramètres du système** (le vecteur d'état) à l'instant $k$ et $k+1$

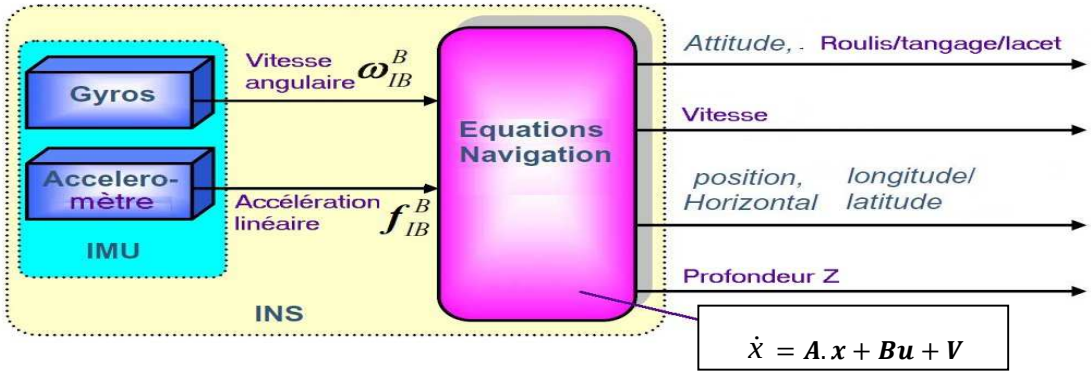
$B_k$ Matrice de commande

$U_k$ sont des **paramètres de commande**

$A_k$ : est la **matrice dynamique** du système (la matrice de transition de $k$ à $k+1$), c'est une matrice qui fait le lien entre les paramètres du système à deux étapes successives. Elle ne dépend que de $F$ et de $dt$.

$v_k$ : est le **bruit d'état**.

Exemple de modèle d'état pour la navigation inertielle du module INS ( inertial navigation system )




$v_k$ peut être le bruit engendré par les gyromètres et les accéléromètres suivant les 3 axes ou d'autres phénomènes (forces de Coriolis)

**2.2) Le modèle de mesure ou d'observation**

Le **modèle de mesure** décrit l'information fournie par le ou les capteurs (ici l'INS) en une équation liant les paramètres de l'état de la mesure et du bruit. L'équation de mesure ou d'observation est donnée par :

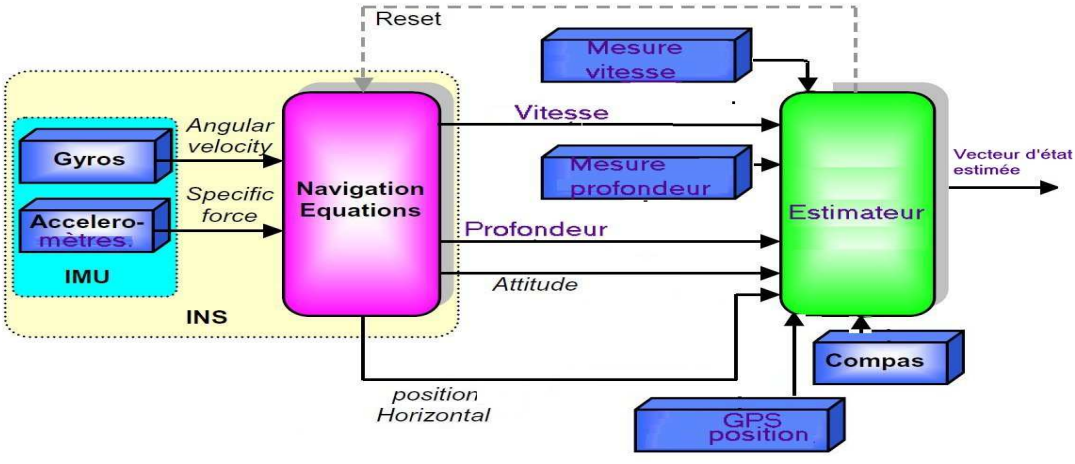
$$z_k = C_k.x_k + w_k$$

$z_k$ : est la **mesure** ou l'observation à l'instant $k$ .

$C_k$ : est la **matrice d'observation**, c'est la matrice qui fait le lien entre les paramètres du système et les mesures. C'est une matrice unitaire colonne. Si plusieurs observations sont disponibles simultanément, il faudra les utiliser les unes après les autres.

$w_k$ : est le **bruit de mesure**.

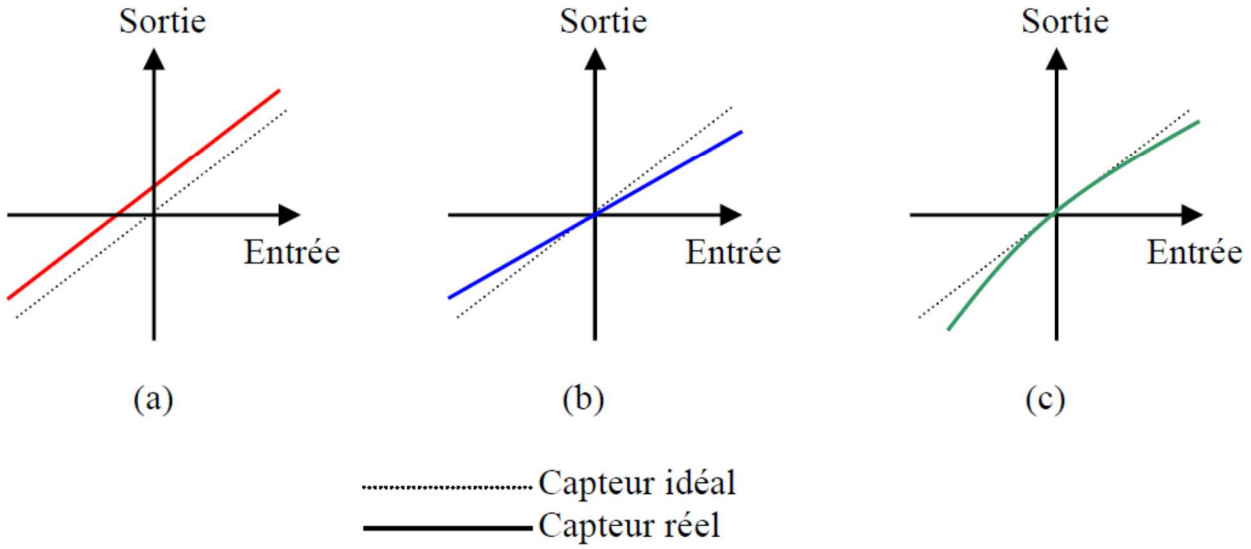
Exemple de modèle d'observation pour la navigation inertielle du module INS (inertial navigation system)




Les observations ou les mesures (vitesse, profondeur, position, attitude) vont permettre d'estimer l'état X du système et de corriger les variables d'états issus de l'INS (vitesse, profondeur, attitude, position).
Le bruit de mesure correspond ici au bruit d'observation (GPS, Loch, compas …..). qui va permettre d'affiner les mesures faites par l'INS.

### 2.3) Les erreurs de mesure

Tout capteur présente des erreurs de mesure qui sont des écarts entre la valeur mesurée et la valeur réelle de la grandeur d'entrée, il s'agit bien souvent des erreurs de biais (ou de zéro), de facteur d'échelle et de linéarité.



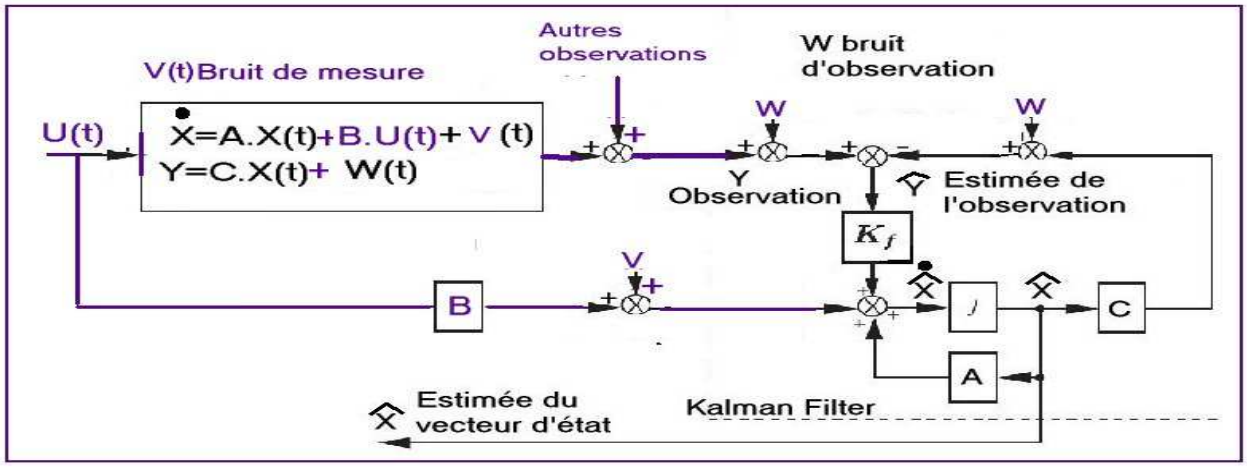

$$\Gamma sortie = (k0 + \Delta k0) + (1 + \Delta k0) \times \Gamma entrée + K2 \times (\Gamma entrée)^2$$

$\Gamma sortie$ : Grandeur mesurée par le capteur
$\Gamma entrée$ : Grandeur physique à mesurée

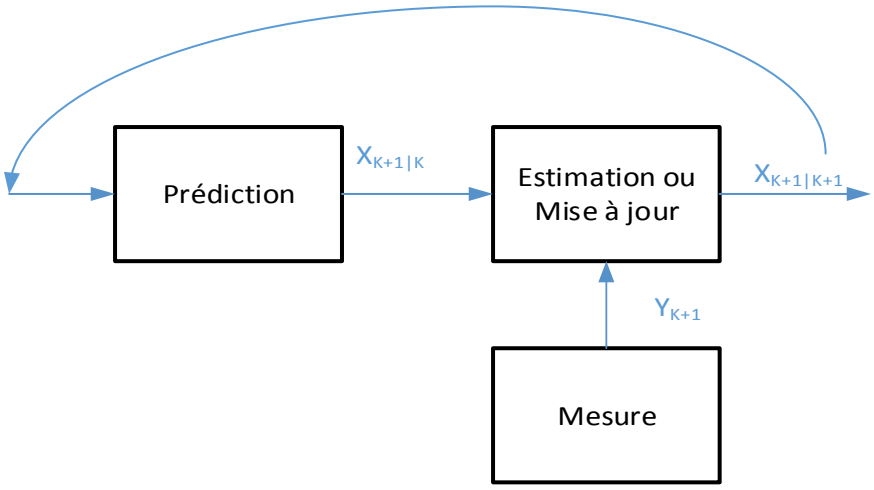
Le biais K0 + ΔK0 est la valeur mesurée en l'absence de grandeur d'entrée. L'instabilité de ce biais représentée par ΔK0 au cours du temps et en fonction des éléments extérieurs (température, ...) constitue, du moins en ce qui concerne sa partie non modélisable, une des principales sources d'erreurs de mesure (bruit de mesure).

### 2.4) L'estimateur de Kalman

Le filtre de Kalman est un filtre d'estimation récursif. Sa particularité est de pouvoir estimer l'état actuel à partir du dernier état précédemment estimé et d'une nouvelle mesure. Il diffère en cela des algorithmes. Il ne conserve aucun historique des mesures ou des estimations.




L'algorithme de Kalman se déroule en deux phases **: la première est** la **phase prédictive**, pendant laquelle le filtre récupère la dernière valeur de l'état estimé pour estimer l'état à l'instant courant **; la deuxième est la phase de mise à jour**, durant laquelle une nouvelle valeur mesurée est introduite, permettant de **corriger L'estimation de la première phase**, et ainsi obtenir un état plus précis.



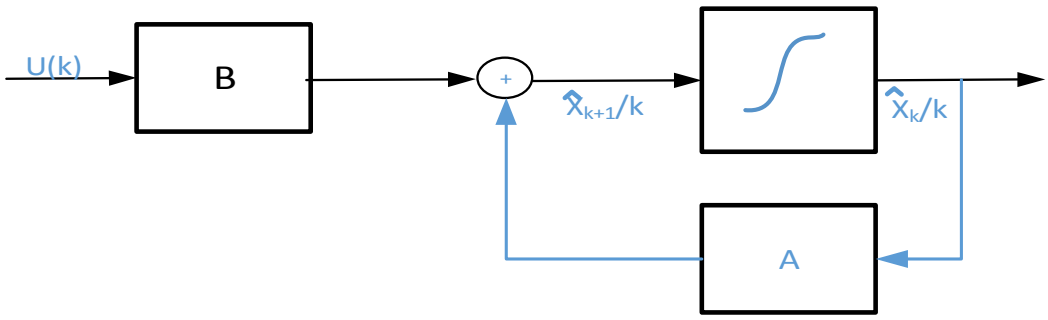

### 2.4.1) La phase prédictive

Basé sur le modèle mathématique ou (l'état initial $\mathbf{X}_0$ estimé au démarrage) une nouvelle valeur du vecteur d'état prédit.

$\hat{x}_{(k+1|k)} = A_k \times \hat{x}_{(k|k)} + B_k \times U_{(k)} + w_k$

$\hat{x}_{(k+1|k)}$ : Vecteur d'état prédit

L'état prédit à l'instant k+1 connaissant toutes les mesures jusqu'à l'instant k que l'on note $\hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k})}$




**L'estimation de l'incertitude de prédiction** $\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})}$ est calculée. Cette incertitude est fonction de l'incertitude initiale et de la précision du modèle (bruit du modèle $w_k$)

**Cette estimation est notée** :

$$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})} = \boldsymbol{E}[\,(\boldsymbol{x(k+1)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k})}) \times (\boldsymbol{x(k+1)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k})})^{\boldsymbol{T}}]$$

$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})}$ **La matrice de covariance de l'erreur de prédiction**

Elle représente aussi la covariance de l'erreur calculée du vecteur d'état *a priori.* En Simplifiant par $B_k = 0$ *on obtient* :

$$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})} = \boldsymbol{A_k} \times \boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k|k})} \times \boldsymbol{A_k}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{Q}_{(\boldsymbol{k})}$$

$Q_{(k)}$: *matrice de covariance du bruit d'état* $w_k$

### 2.4.2) La phase de mise à jour

L'application du filtre aux k premières mesures nous a donné une petite idée (bonne ou mauvaise) du vecteur d'état. Cette **estimation « à priori »** est notée $\hat{x}_{k+1/k}$ : *la valeur du vecteur d'état* $x$ *du système au temps* $k+1$ *avec* $k$ *mesures*.

Si notre idée est bonne, si nous ne nous sommes pas trompés, la mesure effectuée $y_{k+1}$ à l'instant $t_{k+1}$ devrait donner :

$C_k.\hat{x}_{k+1/k}$

Or nous obtenons une valeur $y_{k+1}$ qui a toutes les chances d'être différente de notre attente !

La différence entre la valeur prévue et la valeur mesurée est appelée « **Innovation** » :

$$\tilde{Y} = Y_{k+1} - C_k.\hat{x}_{k+1/k}$$

Elle a pour origine, outre le bruit de mesure, le fait que l'estimation a priori n'est pas parfaite. C'est donc ce terme qui contient l'information nécessaire pour faire progresser notre connaissance du système, pour corriger l'estimation « à priori » et élaborer **l'estimation « à posteriori »** :.

$\hat{x}_{k+1/k+1}$

L'innovation contient un terme sur la précision de la mesure $Y_{k+1}$ et un terme sur l'incertitude de l'état prédit $C_k.\hat{x}_{k+1/k}$.

Ces deux sources d'informations seront pondérées par la suite pour obtenir l'estimation à **posteriori** $\hat{x}_{k+1/k+1}$

On peut également calculer la covariance de l'erreur d'innovation $\boldsymbol{S_{(k+1|k)}}$ (l'erreur d'estimation). Cette quantité nous renseigne sur la statistique de l'écart entre la mesure et la prédiction :

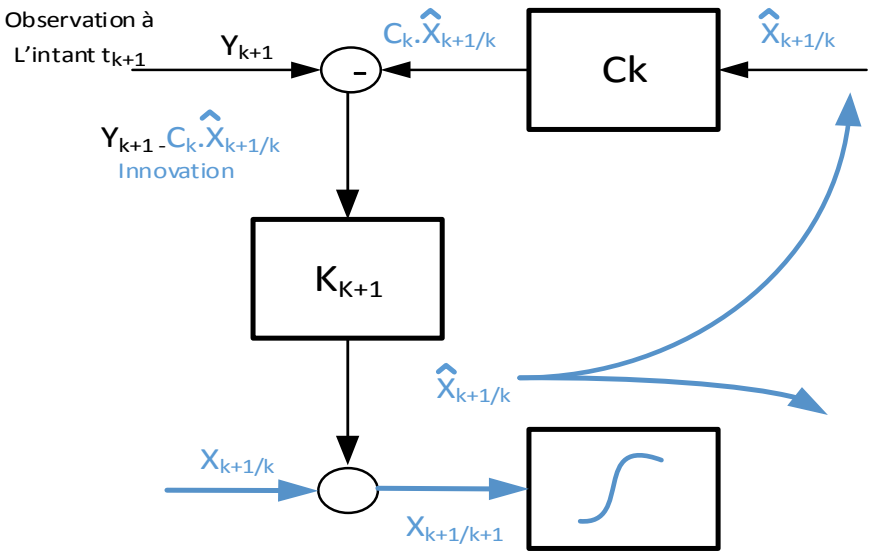
$$\boldsymbol{S_{(k+1|k)}} = C_k \times \boldsymbol{P_{(k+1|k)}} \times \boldsymbol{C_k}^T + \boldsymbol{R_k}$$

$\boldsymbol{R_k}$ Matrice de covariance de bruit de mesure

Nous devons donc combiner l'information « à priori » $\hat{x}_{k+1/k}$ et l'information consécutive à L'innovation $\tilde{Y}$ avec un certain coefficient de pondération $K_{k+1}$.

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}.\hat{s}_{k+1/k}$$

La matrice $K_{k+1}$ est appelée **gain du filtre**



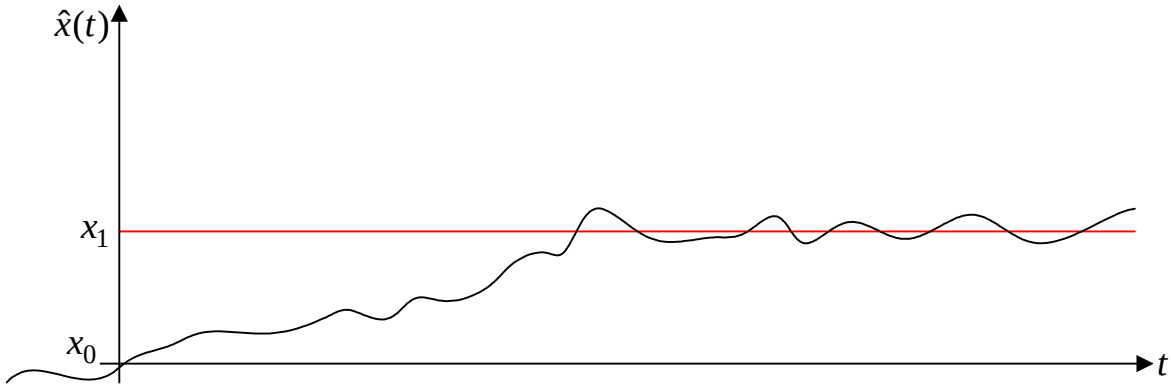

Tout le problème réside dans le choix et le calcul de la matrice de gain $K_k$ qui arbitre entre la connaissance à priori et l'information fournie par la mesure.

Nous allons choisir le gain $K_{k+1}$ qui minimise la variance de l'erreur d'estimation de l'état du système

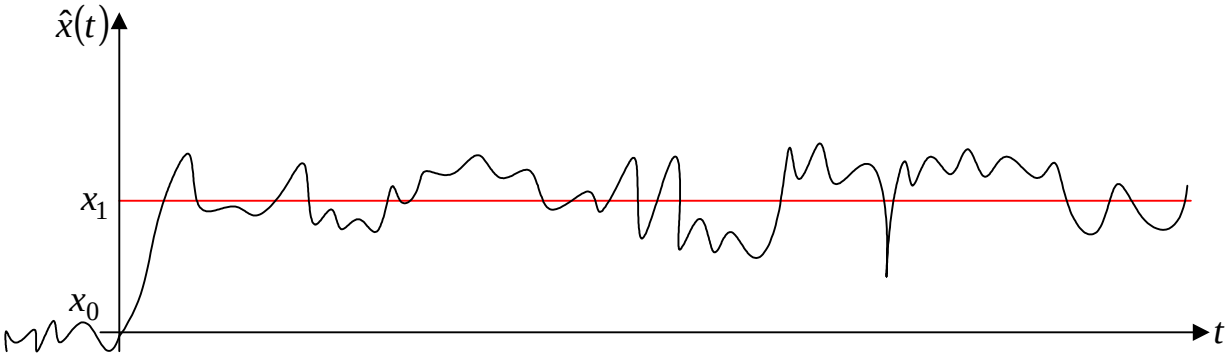
$\varepsilon(t)$=Variance de [x(t) - $\widehat{x(t)}$]

$$\boldsymbol{K_{(k+1)} = P_{(k+1|k)} \times C_k^{\,T} \times S_{(k+1)}^{\,-1}}$$

Si le coefficient $K$ est **faible**, le poids du passé est prépondérant vis-à-vis de celui de l'innovation. En conséquence, l'estimation converge lentement car le crédit accordé au passé entraîne une forte inertie. Mais, pour la même raison, l'estimée est peu sensible à d'importantes erreurs de mesure qui sont alors lissées. Un tel filtre est qualifié « **raide** », on fait ainsi allusion à sa rigidité, sa forte inertie, son aspect conservateur.




Si le coefficient $K$ est **important**, le filtre privilégie l'information extraite de la mesure par rapport à la connaissance acquise par le passé. L'estimation converge rapidement mais reste très affectée par le bruit de mesure. Un tel filtre est qualifié de « **mou** », son comportement est mieux décrit par les qualificatifs de rapide ou de nerveux.




<u>Aspect qualitatif de l'estimation d'une constante à partir d'un changement d'état</u>

Pour un **filtre dit « raide »** : l'aspect de la courbe évoque une certaine stabilité, un lissage important, qui se paie par une convergence lente, due au « poids du passé ».
Pour un **filtre « mou »** : l'aspect de la courbe évoque une convergence rapide mais qui se paie par un mauvais lissage des erreurs de mesure.
Pour une application simple, il paraît possible d'établir empiriquement un compromis entre un filtre trop raide qui converge lentement et un filtre trop raide dont la précision est handicapée par les erreurs de mesure.

**L'incertitude de l'état estimée est** $\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)}}$ est calculée par la suite.

$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)}}$ covariance de l'erreur calculé du vecteur d'état *à posteriori ou de l'erreur d'estimation*

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = E[\,(x(k+1) - \hat{x}_{(k+1|k+1)}\,) \times (x(k+1) - \hat{x}_{(k+1|k+1)}\,)^T]}$$

Cette incertitude est représentée par la matrice de covariance de mise à jour :

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = (I - K_{k+1} \times C_k) \times P_{(k+1|k)}}$$

$\boldsymbol{I}$: ***matrice identité***

Le gain *K* est calculé en fonction de la *confiance* que l'on a dans le modèle (exprimée par la puissance de bruit du modèle w) relativement `à la *confiance* que l'on a dans la mesure (exprimée par la puissance de bruit de la mesure v). Si le modèle est très bon (*W* très "petit") et la mesure très bruitée (*V* très "grand") alors le gain *K* devra être très petit.

### 2.4.1) PROPRIETES STATISTIQUES DES BRUITS

Lors de l'utilisation de ce filtre, l'hypothèse est faite que les bruits d'état $v_k$ et de mesure $w_k$ sont des variables aléatoires dont les distributions gaussiennes sont connues à priori (doivent être estimées à l'avance), indépendantes, blanches et indépendantes de l'état initial du système. Cette indépendance des bruits permet de simplifier le formalisme des équations d'évolution et d'observation, donc :
Valeurs moyennes nulles : $E[v_k] = 0$, $E[w_k] = 0$

Les variances-covariances sont connues :

$E\left[x_k . x_k^T\right] = P$ : matrice de variance de l'état $x$ à l'instant $k$,
$E\left[v_k . v_k^T\right] = Q$ : matrice de variance de processus,
$E\left[w_k . w_k^T\right] = R$ : matrice de variance des mesures,
$E\left[v_k . w_k^T\right] = S$ : matrice de covariance « processus-mesures ».

Les valeurs des matrices $Q$ et $R$ font l'objet d'étude portant sur l'observation, l'expérience et des données industrielles. La détermination de la variance du système est généralement plus difficile que celle de la mesure, parce que l'observation directe de l'état du système est impossible.
Ces matrices sont figées dans le temps, il convient donc pour le bon fonctionnement du filtre de KALMAN, que leurs valeurs correspondent au reflet de la réalité des bruits de l'environnement.
Il a donc fallu établir, dans le modèle des bruits, des relations statistiques liant bruits système et bruits de mesure.

$$\begin{cases} E\left[v_j . v_k^T\right] = 0 \\ E\left[w_j . w_k^T\right] = 0 \end{cases}$$

Cela traduit l'indépendance dans le temps des bruits de mesure et des bruits de système.

$$E\left[v_j . w_k^T\right] = 0$$

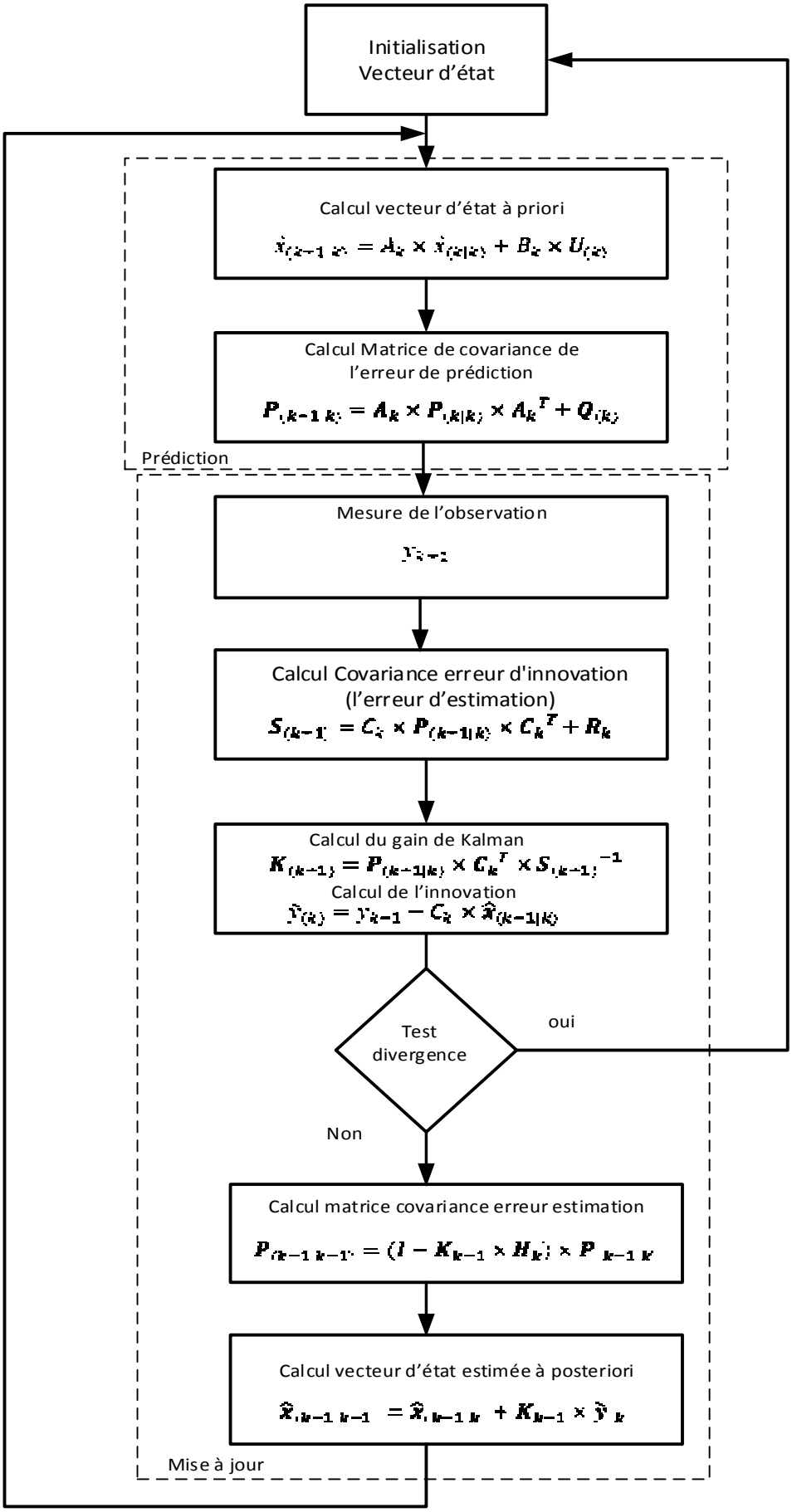
Dans le temps, les bruits de mesure et les bruits de système ne peuvent se corréler. Ceci est le reflet d'une réalité physique si les différents matériels sont indépendants.

$$E\left[w_k . (x_0 - \hat{x}_{0/0})^T\right] = 0$$

Il y a indépendance du bruit de mesure avec l'erreur initiale à la première estimation. Cette dernière propriété est très importante car le premier pas de filtre est très particulier. L'état initial ne sera pas considéré comme un état

estimé et par conséquence ne passera pas dans l'estimateur. $\hat{x}_{0/0}$ sera directement comparé à la première mesure. Si nous n'avions pas écrit cette dernière propriété, le filtre aurait mis beaucoup de temps, à son lancement, à converger vers la valeur vraie.

Le filtre de Kalman peut très facilement s'intégrer dans un calculateur car c'est un algorithme récursif. On donne page suivante l'algorigramme du filtre de calcul.


Initialisation
Vecteur d'état
Calcul vecteur d'état à priori
$\hat{x}_{(k-1|k)} = A_k \times \hat{x}_{(k|k)} + B_k \times U_{(k)}$
Calcul Matrice de covariance de
l'erreur de prédiction
$P_{(k-1|k)} = A_k \times P_{(k|k)} \times A_k^T + Q_{(k)}$
Prédiction
Mesure de l'observation
$y_{k-1}$
Calcul Covariance erreur d'innovation
(l'erreur d'estimation)
$S_{(k-1)} = C_k \times P_{(k-1|k)} \times C_k^T + R_k$
Calcul du gain de Kalman
$K_{(k-1)} = P_{(k-1|k)} \times C_k^T \times S_{(k-1)}^{-1}$
Calcul de l'innovation
$\tilde{y}_{(k)} = y_{k-1} - C_k \times \hat{x}_{(k-1|k)}$
Test
divergence
oui
Non
Calcul matrice covariance erreur estimation
$P_{(k-1|k-1)} = (I - K_{k-1} \times H_k) \times P_{k-1|k}$
Calcul vecteur d'état estimée à posteriori
$\hat{x}_{(k-1|k-1)} = \hat{x}_{(k-1|k)} + K_{k-1} \times \tilde{y}_k$
Mise à jour

# TD : Estimation de la position du roulis en utilisant le filtre de Kalman

## 1) Détermination de l'angle du roulis par un gyromètre

Le gyromètre est un capteur beaucoup moins bruité qu'un accéléromètre et qui offre un meilleur temps de réponse que ce dernier. Malheureusement il dispose d'un biais qui le fait dériver très rapidement avec le temps lorsqu'on veut obtenir la position angulaire.

$$V\theta_x = \frac{d\theta_x}{dt} \rightarrow \theta_x = \int V\theta_x = V\theta_x \times t + \theta_0 \;\; Si\; V\theta_x = cste$$

$$\theta_0 : condition\ initiale$$

Si le capteur dispose d'un biais b on obtient :

$$V\theta_x + b = \frac{d\theta_x}{dt} \rightarrow \theta_x = \int (V\theta_x + b) = (V\theta_x + b) \times t + \theta_0$$

Si le biais b et $V\theta_x$ est constant durant la période d'intégration. Il est donc important pour éviter la dérive dans le temps de l'angle, d'estimer le biais du capteur. Ce biais b sera estimé par un filtre de Kalman qui se servira pour la mise à jour du filtre, de l'angle issu de la mesure faite sur les accéléromètres en utilisant les propriétés de la gravité. L'angle sera mesuré par le gyromètre et un recalage du biais sera effectué par un filtre de Kalman

## 2) Estimation du biais d'un gyromètre par filtrage de Kalman

### 2.1) Partie prédictive

$$\hat{x}_{(k+1|k)} = A_k \times \hat{x}_{(k|k)} + B_k \times U_{(k)}$$

Soit l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_{k+1|k} - \theta_k}{dt} \rightarrow \theta_{k+1|k} = \theta_k + (\dot{\theta} - b)dt \quad et \quad b = b$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k})} = \boldsymbol{A_k} \times \hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k|k})} + \boldsymbol{B_k} \times \boldsymbol{U_{(k)}}$$

$$\hat{x}_{(k+1|k)} = \begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} dt \\ 0 \end{bmatrix}_k [\dot{\theta} \quad 0]_k$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k \; et \; B_k = \begin{bmatrix} dt \\ 0 \end{bmatrix}_k$$

Estimation prédite de la covariance
L'état prédit à l'instant k+1 connaissant toutes les mesures jusqu'à l'instant k que l'on note $\hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k})}$
**Et auquel on associe la matrice de covariance de l'erreur de prédiction notée**

$$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})} = \boldsymbol{E}[\,(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k+1}) - \hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k})}) \times (\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k+1}) - \hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k})})^{\boldsymbol{T}}]$$

$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})}$ covariance de l'erreur calculée du vecteur d'état *a priori*

$$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})} = \boldsymbol{A_k} \times \boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k|k})} \times \boldsymbol{A_k}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{Q}_{(\boldsymbol{k})}$$

$$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{k+1|k})} = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{P00} & \boldsymbol{P01} \\ \boldsymbol{P10} & \boldsymbol{P11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -dt & 1 \end{bmatrix}_k + \boldsymbol{Q}_{(\boldsymbol{k})} * \boldsymbol{dt}$$

$$\boldsymbol{Q}_{(\boldsymbol{k})} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Qangle} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Qgyro} \end{bmatrix}$$

$$Q_{(k)} : matrice\ de\ covariance\ du\ bruit\ d'état$$

Elle indique quelle confiance on peut apporter au modèle et au bruit du modèle

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k)}} = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{P00 - dt \times P01} & \boldsymbol{P01} \\ \boldsymbol{P10 - dt \times P11} & \boldsymbol{P11} \end{bmatrix} + \boldsymbol{Q_{(k)} * dt}$$

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P00 - dt \times P01 - dt \times P10 + P11 \times dt^2} & \boldsymbol{P01 - dt \times P11} \\ \boldsymbol{P10 - dt \times P11} & \boldsymbol{P11} \end{bmatrix} + \boldsymbol{Q_{(k)} * dt}$$

$$\boldsymbol{Q_{(k)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Qangle} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{qgyro} \end{bmatrix}$$

A l'ordre 1 on a

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P00 - (dt \times P01) - (dt \times P10) + Qangle * dt} & \boldsymbol{P01 - dt \times P11} \\ \boldsymbol{P10 - dt \times P11} & \boldsymbol{P11 + qgyro * dt} \end{bmatrix}$$

## 2.2) Partie mise à jour :

$\tilde{y}_{(k)} = y_{k+1} - C_k \times \hat{\boldsymbol{x}}_{(k+1|k)}$ $\tilde{y}_{(k)}$ *est l'innovation*

$Y_{k+1}$ est la nouvelle observation (mesure).de l'angle donné par le résultat de l'arc tangente entre les 2 axes de l'accéléromètre.

$$C_k = [1\ 0]$$

$$\tilde{y}_{(k)} = y_{k+1} - [1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix}_{k+1|k}$$

$$\tilde{y}_{(k)} = y_{k+1} - \theta_{k+1|k}$$

On peut également calculer la covariance de l'erreur d'innovation $\boldsymbol{S_{(k)}}$ (l'erreur d'estimation). Cette quantité nous renseigne sur la statistique de l'écart entre la mesure et la prédiction :

$$\boldsymbol{S_{(k+1)}} = C_k \times \boldsymbol{P_{(k+1|k)}} \times \boldsymbol{C_k}^T + \boldsymbol{R_k}$$

$$\boldsymbol{S_{(k+1)}} = [1 \quad 0] \times \boldsymbol{P_{(k+1|k)}} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{R_k}$$

Avec $\boldsymbol{R_k} = \boldsymbol{Rangle}$
$\boldsymbol{R_k}$ Matrice de covariance de bruit de mesure

$$\boldsymbol{S_{(k+1)}} = [1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{P00} & \boldsymbol{P01} \\ \boldsymbol{P10} & \boldsymbol{P11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{R_k}$$

$$\boldsymbol{S_{(k+1)}} = P00 + \boldsymbol{Rangle}$$

Le gain est calculé en fonction de la confiance que l'on a dans le modèle (caractérisée par la matrice$\boldsymbol{Q_{(k)}}$) relativement à la confiance que l'on a dans la mesure (caractérisée par $\boldsymbol{R_k}$). Elle peut etre comprise comme un facteur de pondération. Pour illustrer le rôle de la pondération, si le modèle est très bon ($\boldsymbol{Q_{(k)}}$ très petit) et que la mesure est très bruitée ($\boldsymbol{R_k}$ tres grand) alors le gain devra être très petit.
Le gain de Kalman :

$$\boldsymbol{K_{(k+1)}} = \boldsymbol{P_{(k+1|k)}} \times \boldsymbol{C_k}^T \times \boldsymbol{S_{(k+1)}}^{-1}$$

$$\boldsymbol{K_{(k+1)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P00} & \boldsymbol{P01} \\ \boldsymbol{P10} & \boldsymbol{P11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \times \boldsymbol{S_{(k+1)}}^{-1}$$

$$\boldsymbol{K_{(k+1)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P00} \\ \boldsymbol{P10} \end{bmatrix} \times \boldsymbol{S_{(k+1)}}^{-1}$$

Et le nouvel état corrigé :

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{(k+1|k+1)} = \hat{\boldsymbol{x}}_{(k+1|k)} + \boldsymbol{K_{k+1}} \times \tilde{\boldsymbol{y}}_{(k)}$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix}_{k+1|K+1} = \begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix}_{k+1|k} + \boldsymbol{K_{k+1}} \times (y_k - \theta_k)$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix}_{k+1|K+1} = \begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix}_{k+1|k} + \begin{bmatrix} K0 \\ K1 \end{bmatrix} \times (y_k - \theta_k)$$

*L'état estimée connaissant la mesure à l'instant k+1 (après le recalage) que l'on note* $\hat{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{k+1|k+1})}$ ***auquel on associe la matrice de covariance de l'erreur d'estimation***

$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)}}$ covariance de l'erreur calculé du vecteur d'état *a posteriori ou de l'erreur d'estimation*

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = E[\ (x(k+1) - \hat{x}_{(k+1|k+1)}\ ) \times (x(k+1) - \hat{x}_{(k+1|k+1)}\ )^T]}$$

Enfin, la matrice de covariance mise à jour :

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = (I - K_{k+1} \times C_k) \times P_{(k+1|k)}}$$

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K0 \\ K1 \end{bmatrix} \times [1\ 0]\ ) \times \begin{bmatrix} P00 & P01 \\ P10 & P11 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k0 & 0 \\ k1 & 0 \end{bmatrix}\ ) \times \begin{bmatrix} P00 & P01 \\ P10 & P11 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = (\begin{bmatrix} 1-k0 & 0 \\ -K1 & 1 \end{bmatrix}\ ) \times \begin{bmatrix} P00 & P01 \\ P10 & P11 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{P_{(k+1|k+1)} = (\begin{bmatrix} P00 - k0 \times P00 & P01 - k0 \times P01 \\ -K1 \times P00 + P10 & -K1 \times P01 + P11 \end{bmatrix}\ )}$$