2.3) les modulations numériques

2.3.1) Les caractéristiques d'une modulation numérique

a) La rapidité de modulation R ou **Ds** se définit comme étant le nombre de changements d'états ou de symboles par seconde d'un ou de plusieurs paramètres modifiés simultanément. Un changement de phase du signal porteur, une excursion de fréquence ou une variation d'amplitude sont par définition des changements d'états ou de symboles. La "rapidité de modulation s'exprime en "bauds".

$$R = \frac{1}{TB}$$

TB : durée du changement d'état

b) Le débit binaire D *ou* ***Db*** se définit comme étant le nombre de **bits transmis par seconde**. Il sera égal ou supérieur à la rapidité de modulation selon qu'un changement d'état représentera un bit ou un groupement de bits. Le "débit binaire" Si l'alphabet se limite à 2 caractères 0 ou 1 D=R et s'exprime en "bits par seconde".
Si l'alphabet se limite à M Caractères (M>2), on transmet donc plusieurs bits pour une période TB et on a la relation fondamentale

$M = 2^n$

soit D =n. R.

c) Le taux d'erreur par bit ou BERR

La qualité d'une liaison est liée au **taux d'erreur par bit** :

$$T.E.B = \frac{\text{nombre de bits faux}}{\text{nombre de bits transmis}}$$

***d)* L'efficacité spectrale EFF** d'une modulation se définit par le paramètre
Elle s'exprime en "bit/seconde/Hz". La valeur D est le "débit binaire" et B est la largeur de la bande occupée par le signal modulé.

$$EFF = \frac{D}{B}$$

e) Un *symbole* est un élément d'un alphabet. Si M est la taille de l'alphabet, le symbole est alors dit M-aire. Lorsque M=2, le symbole est dit binaire. En groupant, sous forme d'un bloc, *n* symboles binaires indépendants, on obtient un alphabet de $M = 2^n$ symboles M-aires.

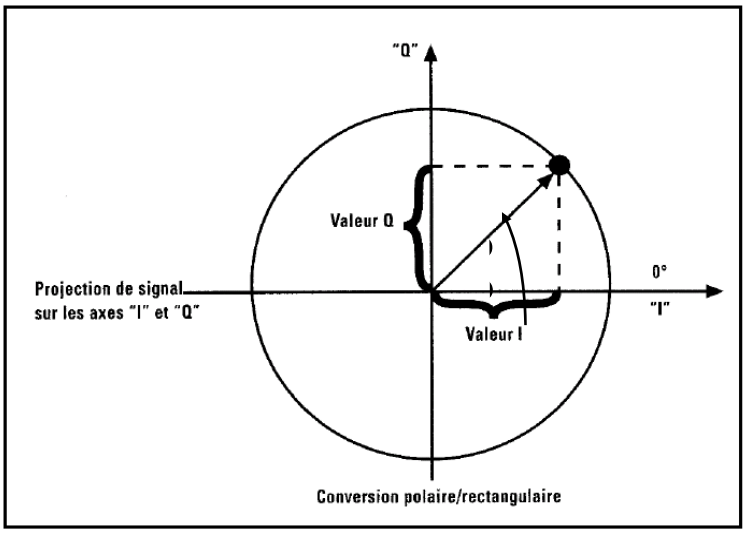
2.3.2) Représentation IQ des différents types de modulation

$$e(t) = E\sin(wt+\varphi)$$

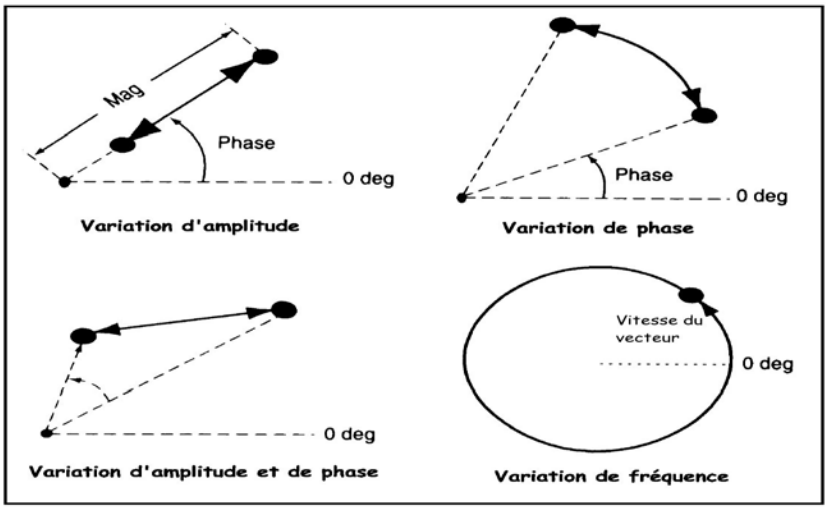
$$e(t)=E\sin\varphi\times\cos(wt)+E\cos\varphi\times\sin(wt)$$
$$e(t) = q(t)\times\cos(wt) + i(t)\times\sin(wt)$$

$$q(t)=E\sin\varphi$$

$$i(t)=E\cos\varphi$$



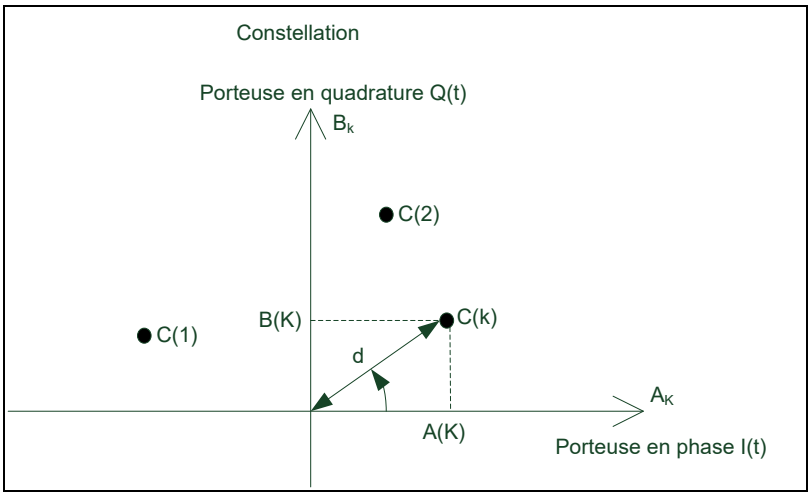
La porteuse devient la référence de fréquence et de phase, et le signal s'interprète par rapport à la porteuse. Les différents types de modulation peuvent se représenter sous forme polaire. L'amplitude est représentée comme étant la distance au centre, l'angle représentant la phase.



La constellation

I(t) et Q(t) prennent des valeurs discrètes respectivement *Ak* et *Bk* pour les différents types de modulation numériques PSK et QAM.

Une représentation dans le plan complexe qui fait correspondre à chaque signal élémentaire ou symbole un point *Ck = Ak + jBk* permet de différencier chaque type de modulation. L'ensemble de ces points associés aux symboles porte le nom de **constellation**.



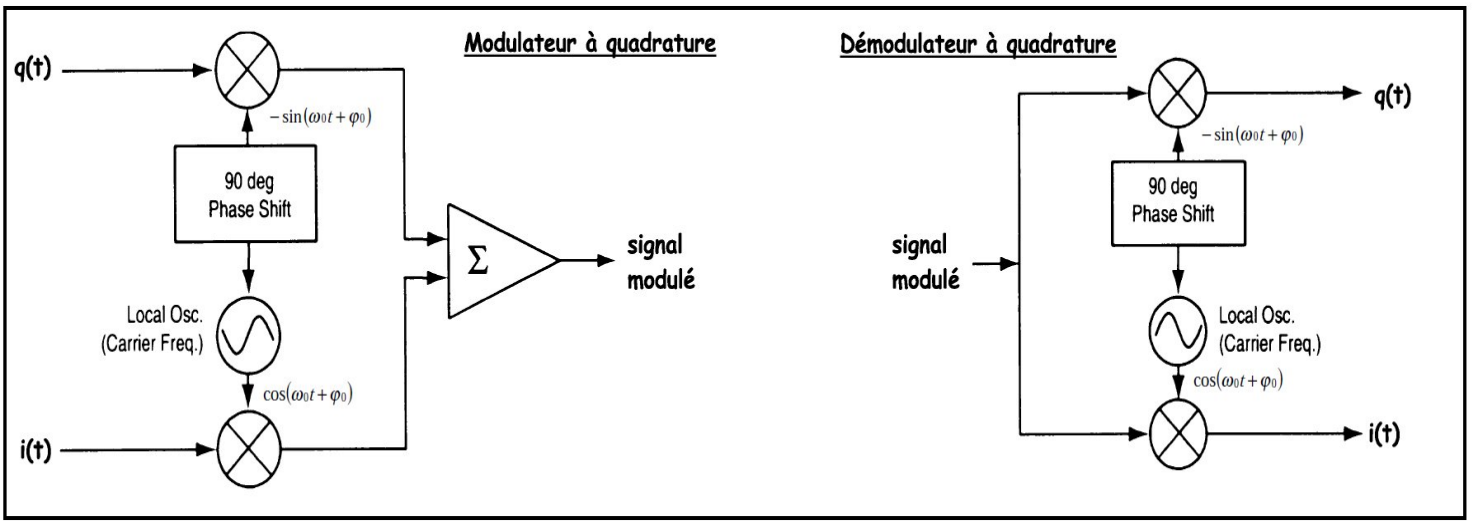
La distinction des symboles est liée à la distance minimale dmin = min|c(i) – c(j)|2 entre les pts représentatifs des symboles plus dmin augmente , plus le TEB diminue

L' énergie de transmission est proportionnelle à la distance d du point c(k) à l'origine (en racine d'énergie)

La puissance moyenne d'émission des symboles est égale à :

$\Sigma\ |c(k)|^2$

Le schéma théorique du modulateur et du démodulateur est représenté ci-dessous.



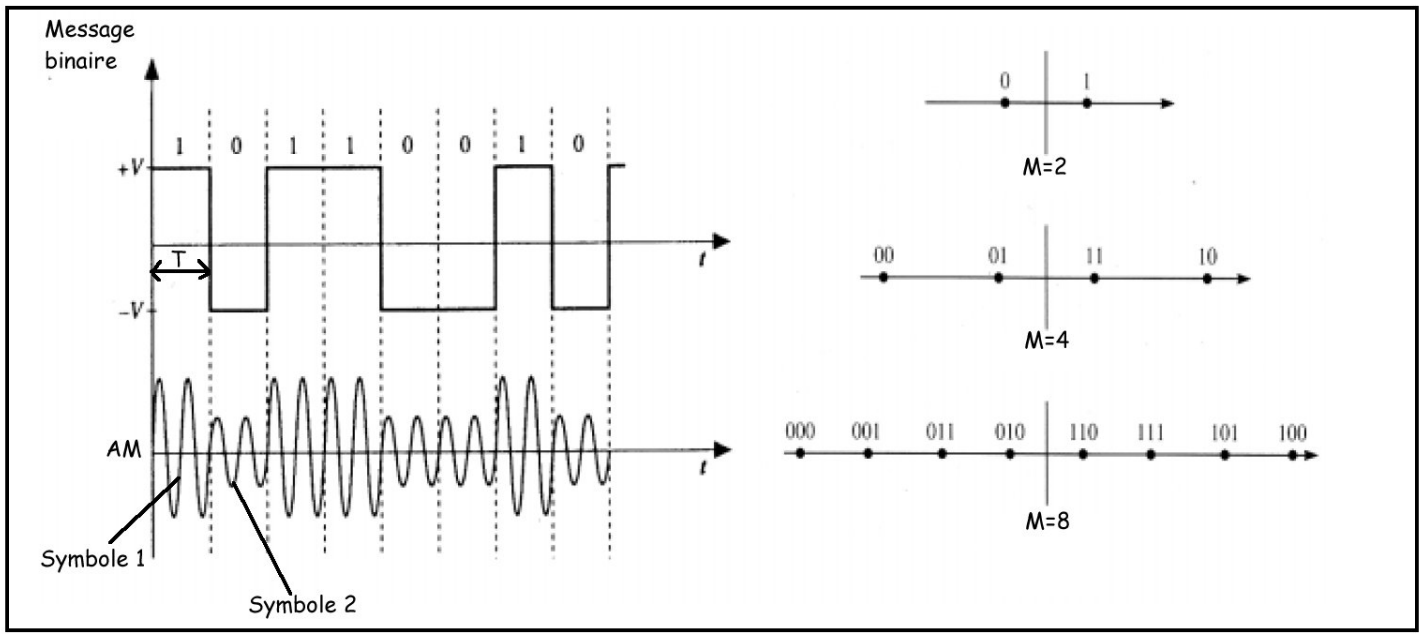
2.3.3) Les différentes types de modulation numériques

2.3.3.1) La modulation par saut d'amplitude (PAM ou ASK) 10Gb-T

En modulation par saut d'amplitude, les symboles transmis sont :

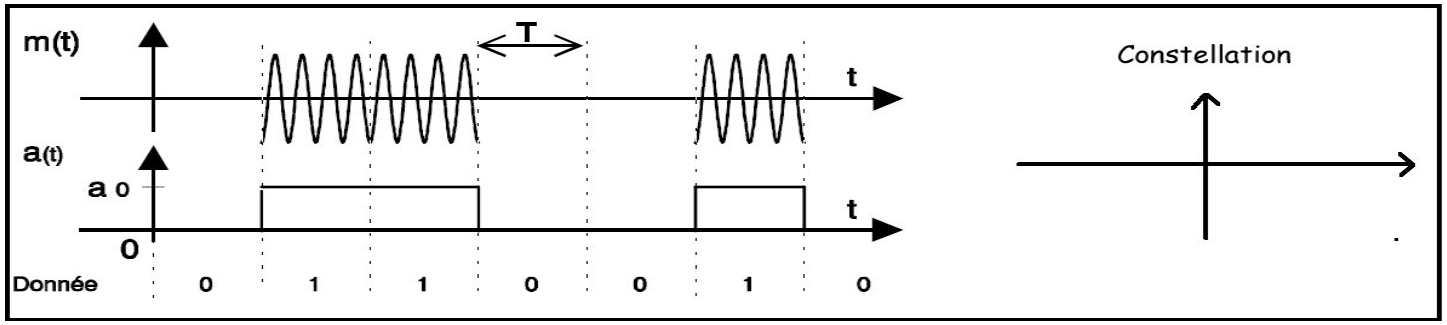
$Sm(t)=Am.\cos(2.\pi.fo.t)$ $m=1,2,....M$ $0<t<T$

f0 fréquence de la porteuse
Le diagramme des constellations et la forme d'onde des symboles sont représentés à la Figure ci-dessous :

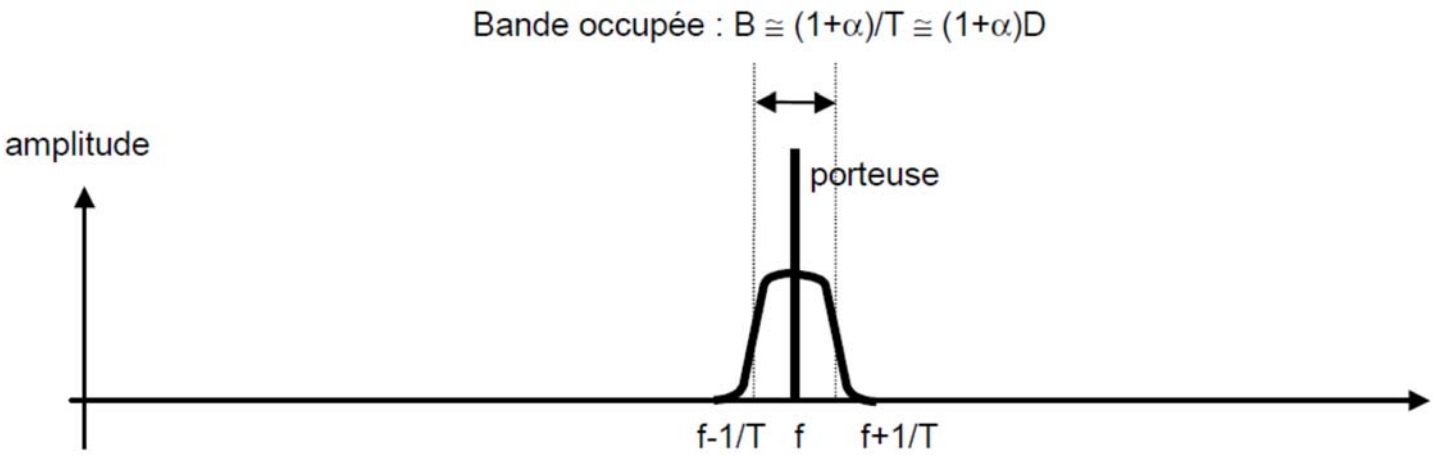


Que vaut la taille M de l'alphabet pour le chronogramme ci-dessus et la valeur de n ?

Cas particulier la modulation par tout ou rien



Complétez la constellation ci-dessus



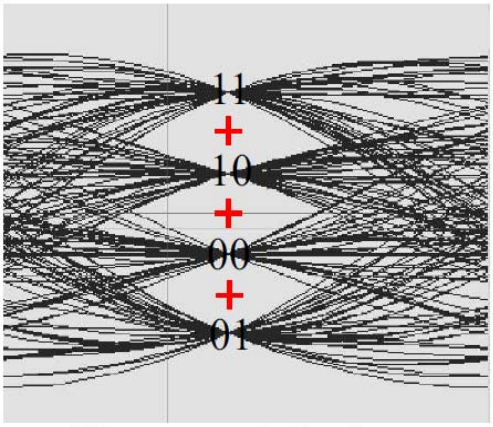


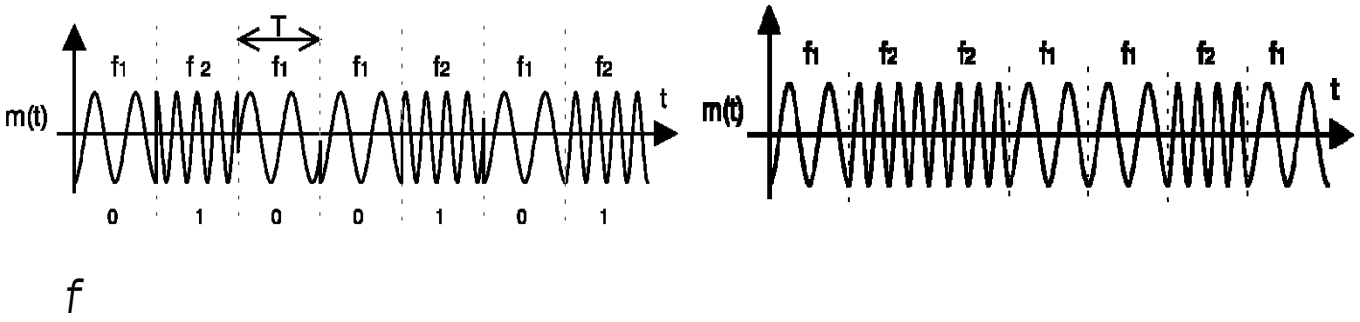
Diagramme de l'oeil pour une 4-ASK

Conclusion

La tentation d'augmenter *M* (c'est à dire le nombre de bits transmis par symbole) est grande mais présente les avantages et les inconvénients suivants :
L'*efficacité spectrale* augmente, (pour une largeur de la bande *B* donnée).
Malheureusement, la probabilité d'erreur par symbole *Ps(e)* augmente aussi, et, pour ne pas la dégrader, il sera nécessaire d'augmenter l'énergie émise par bit.
Finalement, ce type de modulation est simple à réaliser mais est assez peu employé pour M>2 car ses performances sont moins bonnes que celles d'autres modulations, notamment pour sa résistance au bruit.

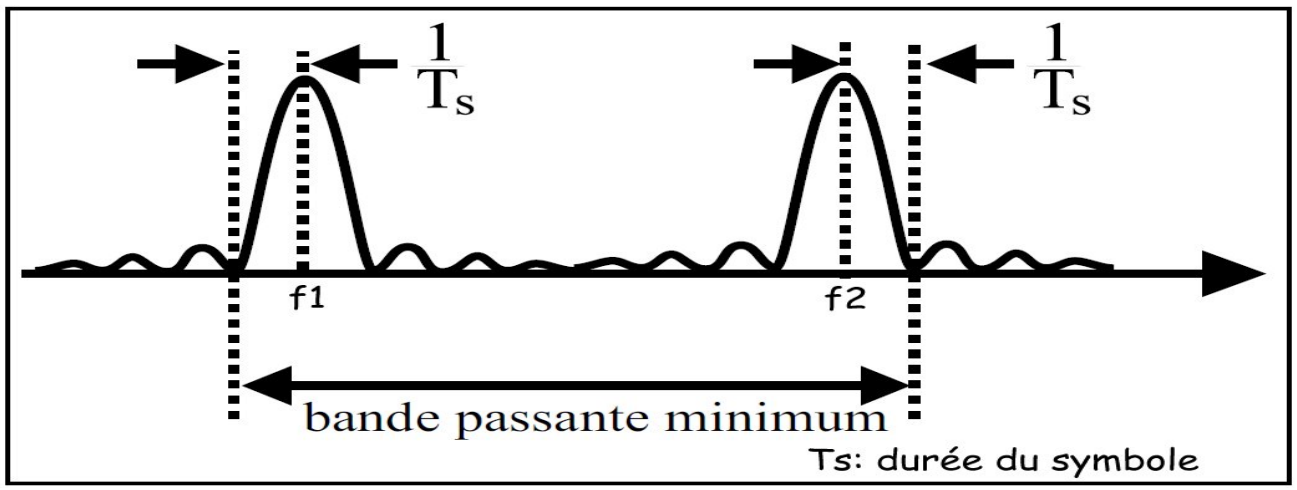
2.3.3.2) <u>La modulation par déplacement de fréquence</u>

La porteuse est modulée en fréquence par le signal numérique, c'est à dire qu'elle saute d'une fréquence f1 (pour le « 0 ») à une fréquence f2 (pour le « 1 »).



f

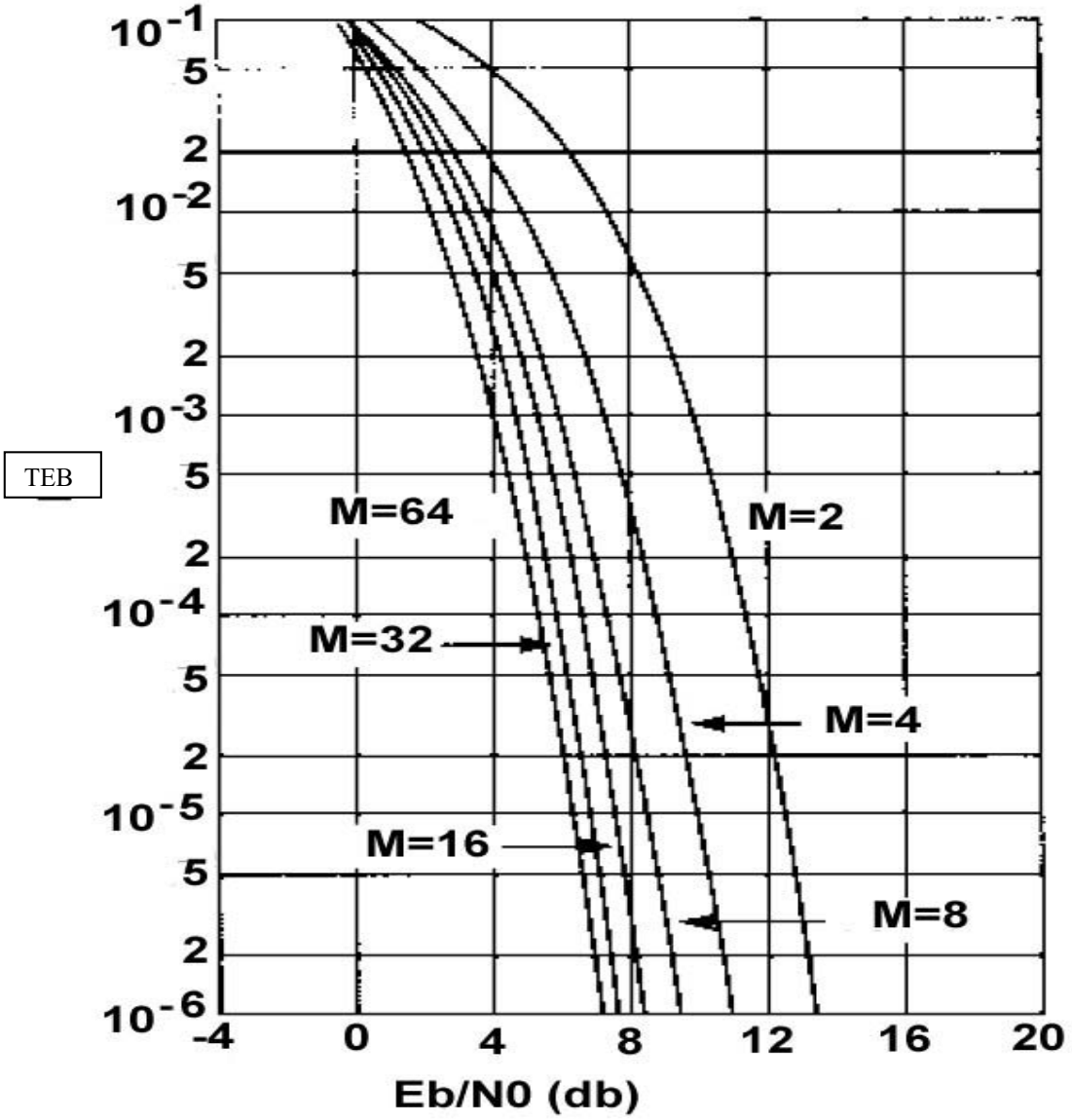
Spectre d'une FSK à phase continue



Nous avons trouvé deux types de Modulation par Déplacement de fréquence

La FSK à phase discontinue :
- Elle est simple de réalisation.
- Son principal défaut est la grande bande passante dont elle a besoin pour pouvoir transmettre les sauts de phase.

La FSK avec continuité de phase :
- Elle est plus complexe à réaliser.
- Elle requiert une bande passante plus étroite.



Taux d'erreur sur le bit pour les modulations FSK.

2.3.3.3) La modulation par déplacement de phase (MDP)

a) principe

Le signal modulé m(t) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} m(t) &= A.\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi_k) \\ &= A.\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\cos(\varphi_k) - A.\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\sin(\varphi_k) \end{aligned}$$

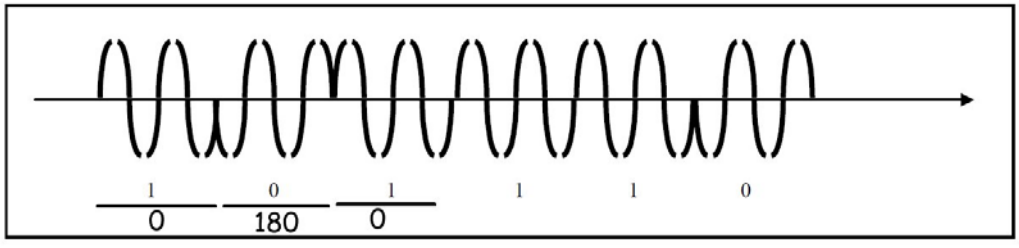
$$\varphi_k = \frac{\pi}{M} + k\frac{2\pi}{M} \qquad \text{lorsque } M > 2$$
$$\varphi_k = 0 \text{ ou } \pi \qquad \text{lorsque } M = 2.$$

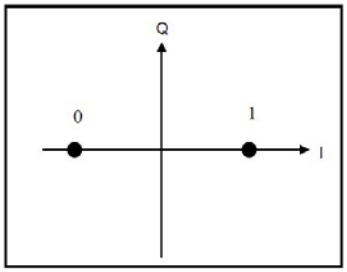
k = 0,1,…M-1

L'expression de m(t) montre que la phase de la porteuse est modulée par l'argument φk de chaque symbole ce qui explique le nom donné à la MDP. Remarquons aussi que la porteuse en phase cos(w0t +φ0) est modulée en amplitude par le signal A.cos(φk)=i(t) et que la porteuse en quadrature sin(w0t +φ0) est modulée en amplitude par le signal A.sin(φk)=q(t).
L'expression de la MDP montre qu'il s'agit d'une modulation à enveloppe constante ; l'enveloppe étant le module de l'enveloppe complexe. Cette propriété est intéressante pour des transmissions sur des canaux non linéaires, ce qui fait de la MDP un outil de choix par exemple pour les transmissions par satellites. L'intérêt d'avoir un signal modulé à enveloppe constante est que cela permet d'employer les amplificateurs dans leur zone de meilleur rendement qui correspond souvent à un mode de fonctionnement non linéaire.

b) La modulation MDP-2 ou BPSK

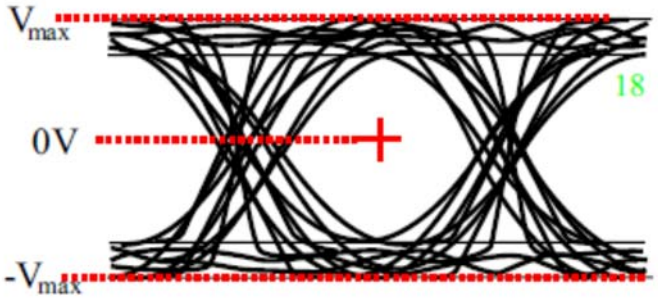
La modulation MDP-2 encore appelée par son abréviation anglaise : BPSK pour "Binary Phase shift Keying".
C'est une modulation binaire (un seul bit est transmis par période T) : n=1, M=2 et φk = 0 ou φk = π





Ce type de modulation donne une porteuse présentant des sauts de phase de π à chaque changement de l'information binaire.

Diagramme de l'œil



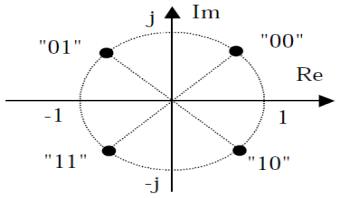
c) La modulation MDP-4 ou QPSK (V26 type B)

Un autre exemple de modulation MDP-M est la modulation MDP-4 encore appelée par son abréviation anglaise : QPSK pour "Quadrature Phase shift Keying".

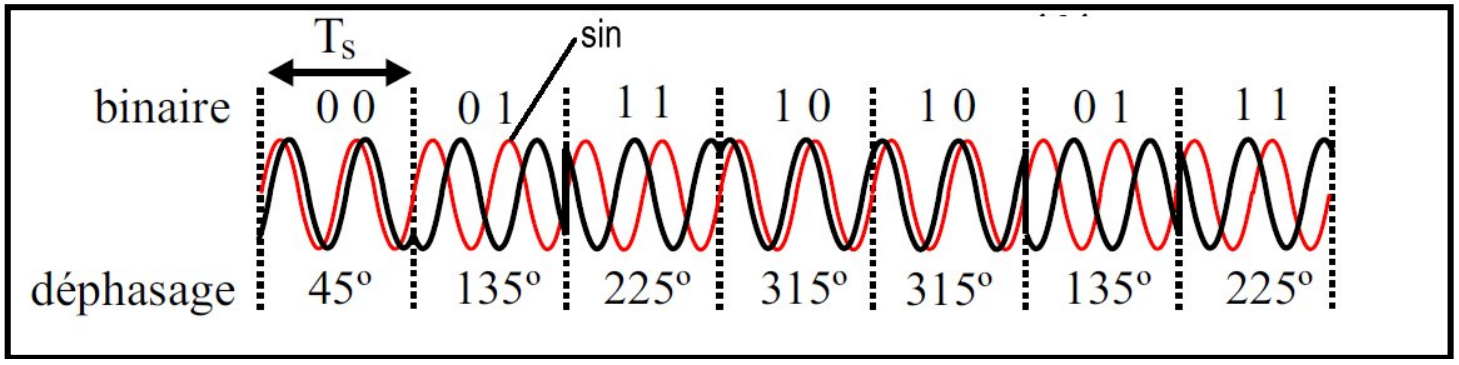
C'est une modulation d'amplitude à deux niveaux sur chacune des porteuses en quadrature. Dans ce cas : *n=2*, *M=4* et

$$\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Bit pair	Bit impair	Symbole	φ_k	$a_k \lvert i(t)\rvert$	$b_k \lvert q(t)\rvert$
0	0	00	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1	0	01	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1	1	11	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	1	10	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

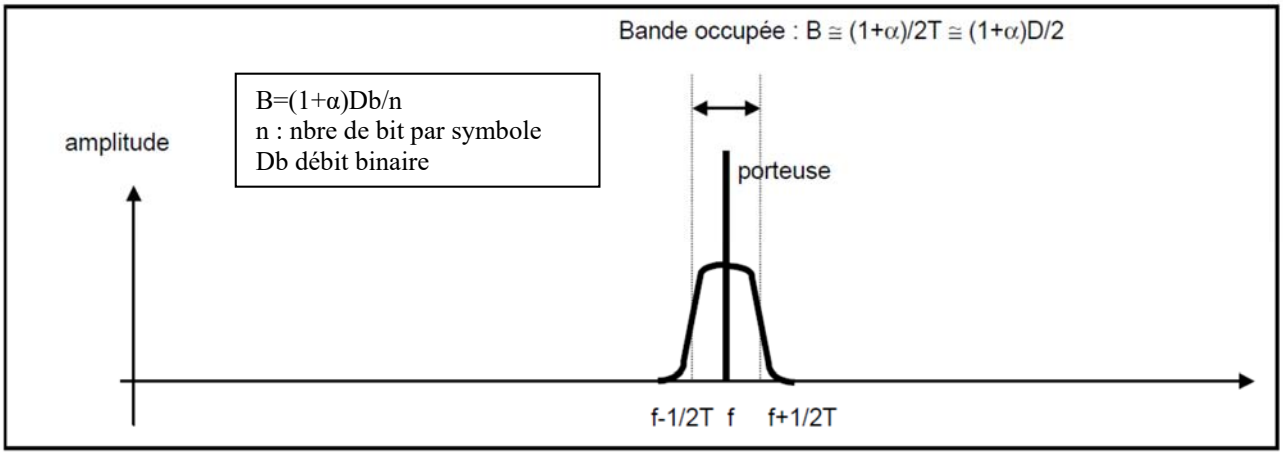


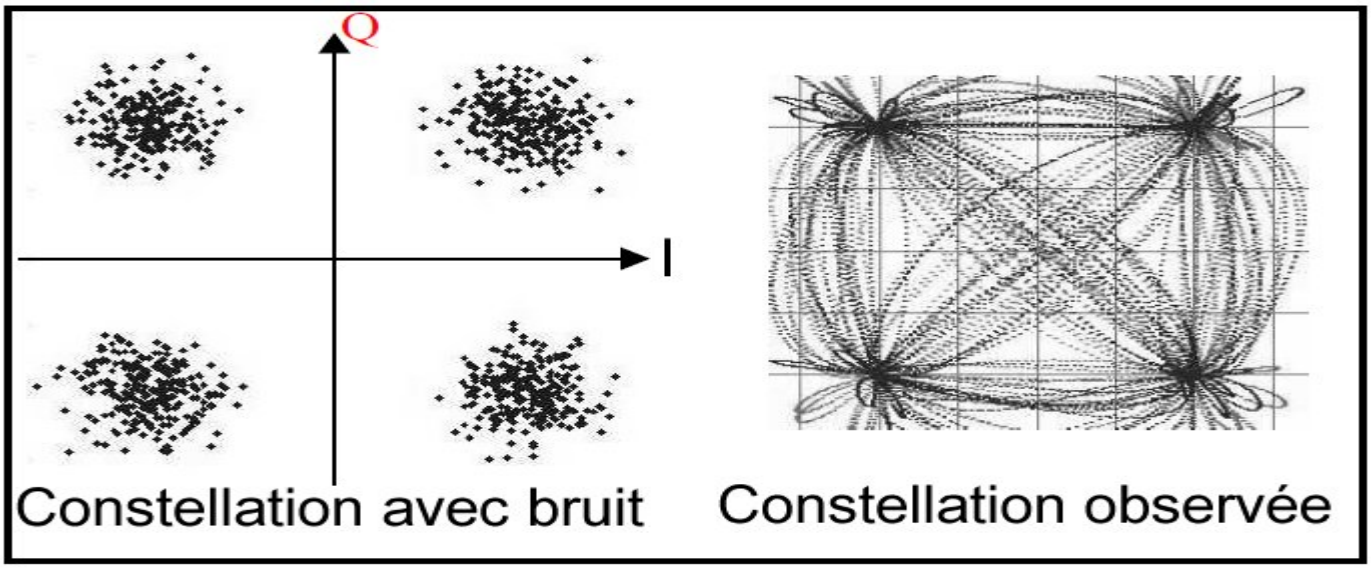
Si φ0 = π/2



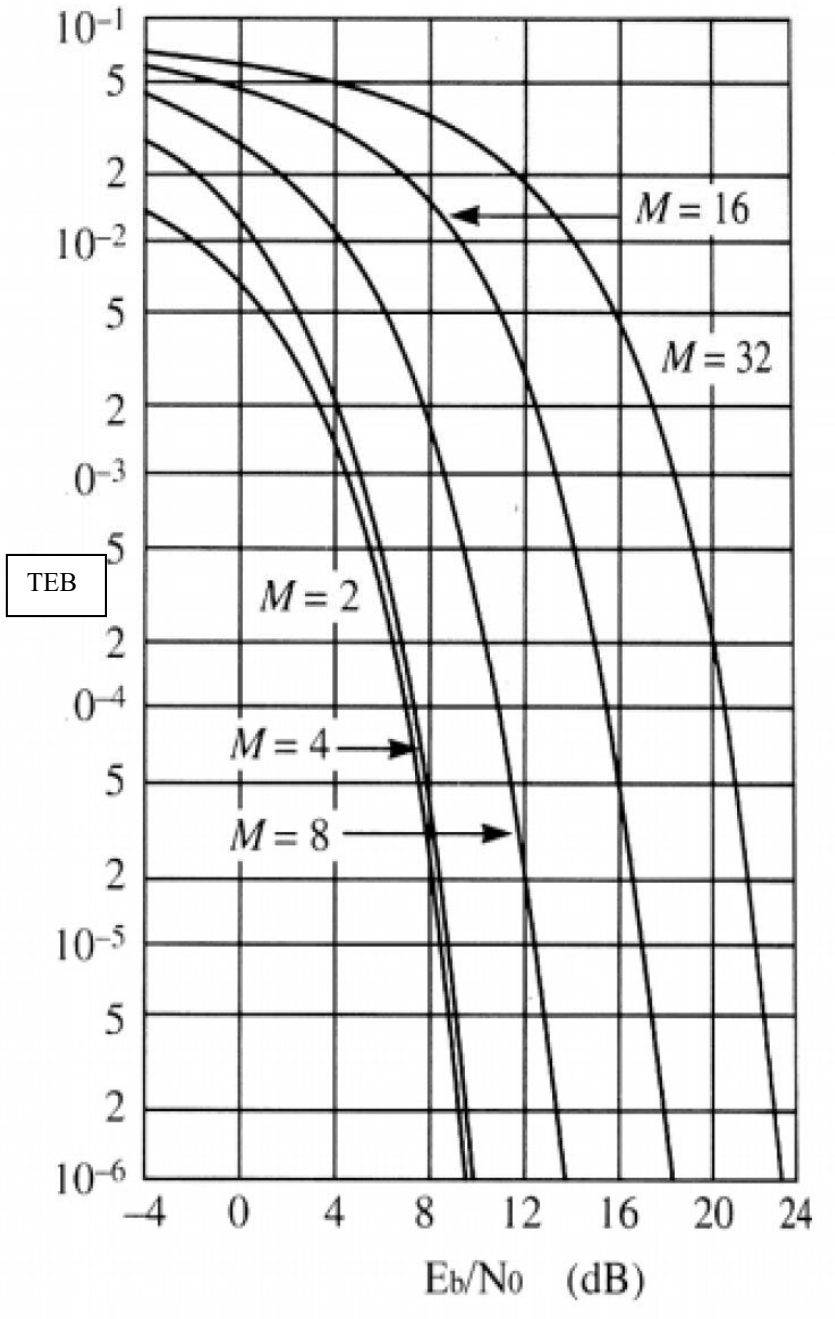
La tentation d'augmenter *M* (c'est à dire le nombre de bits transmis par symbole) est grande et présente les avantages et les inconvénients suivants :
L'*efficacité spectrale M* augmente, (pour une largeur de la bande *B* donnée).

La probabilité d'erreur par symbole *Ps(e)* augmente aussi, et, pour ne pas la dégrader il est nécessaire d'augmenter le rapport signal sur bruit, cette augmentation restant raisonnable jusque *M = 16*.
La complexité de l'ensemble émission/réception de la MDP augmente avec M. Cependant cette complexité n'est pas très élevée et fait de la MDP une modulation fréquemment utilisée pour M allant de 2 à 16 avec de bonnes performances.
La MDA et la MDP ne constituent pas une solution satisfaisante pour utiliser efficacement l'énergie émise lorsque le nombre de points *M* est grand. En effet, dans la MDA les points de la constellation sont sur une droite, et dans la MDP les points sont sur un cercle. Or, la probabilité d'erreur est fonction de la distance minimale entre les points de la constellation, et la meilleure modulation est celle qui maximise cette distance pour une puissance moyenne donnée. Un choix plus rationnel est alors une modulation qui répartit les points uniformément dans le plan.





Lorsque le nombre binaire change on se déplace d'un point à un autre. La figure ci-dessus nous donne les chemins pris pour se déplacer d'un point à un autre en présence de bruit. On n'échantillonne pas entre 2 points mais lorsque le mouvement est stabilisé entre 2 points (équivalent à échantillonner au milieu du diagramme de l'œil).



$$P_M = 2Q\left(\sqrt{2\log_2 M \frac{E_b}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

2.3.3.4) Modulation d'amplitude sur deux porteuses en quadrature (MAQ-M)

Nous avons vu que le signal modulé *m(t)* peut s'écrire

$$m(t) = a(t).\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - b(t).\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$a(t)=a_k$ et $b(t)=b_k$ avec $0<T<Ts$

Ts : durée du symbole

$$m(t) = a_k \cos(wo \times t + \varphi 0) - b_k.\sin(wo \times t + \varphi 0)$$

$$m(t)\ signal \quad \text{mod}ulé$$

$$m(t) = R((a_k + jb_k)e^{jwot}e^{j\varphi 0})$$

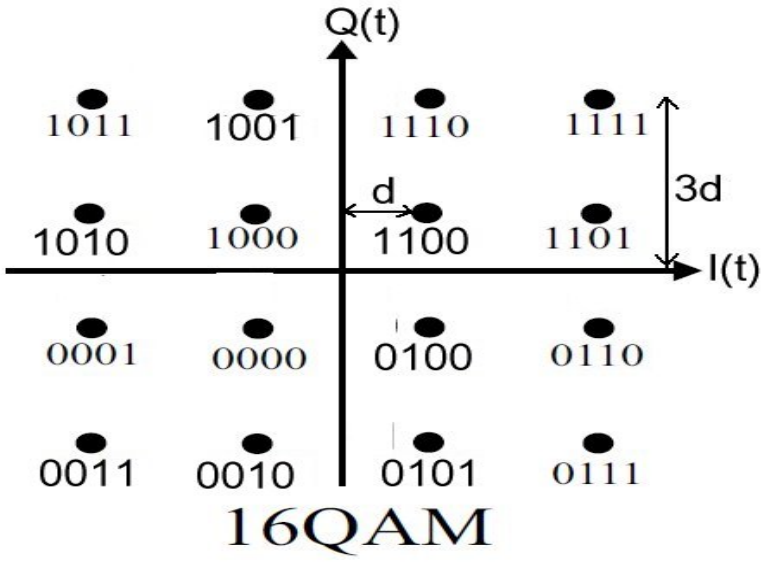
$$m(t) = R(c_k e^{j\varphi k}e^{jwot}e^{j\varphi 0}) = \mathbf{c_k cos(wo \times t + \varphi 0 + \varphi_k)}$$

$$avec\ c_k = \sqrt{(a_k{}^2 + b_k{}^2)}\ ou\ \varphi_k = \arctan(\frac{b_k}{a_k})$$

Cette écriture montre que la modulation MAQ peut être considérée comme une modulation simultanée de la phase et de l'amplitude

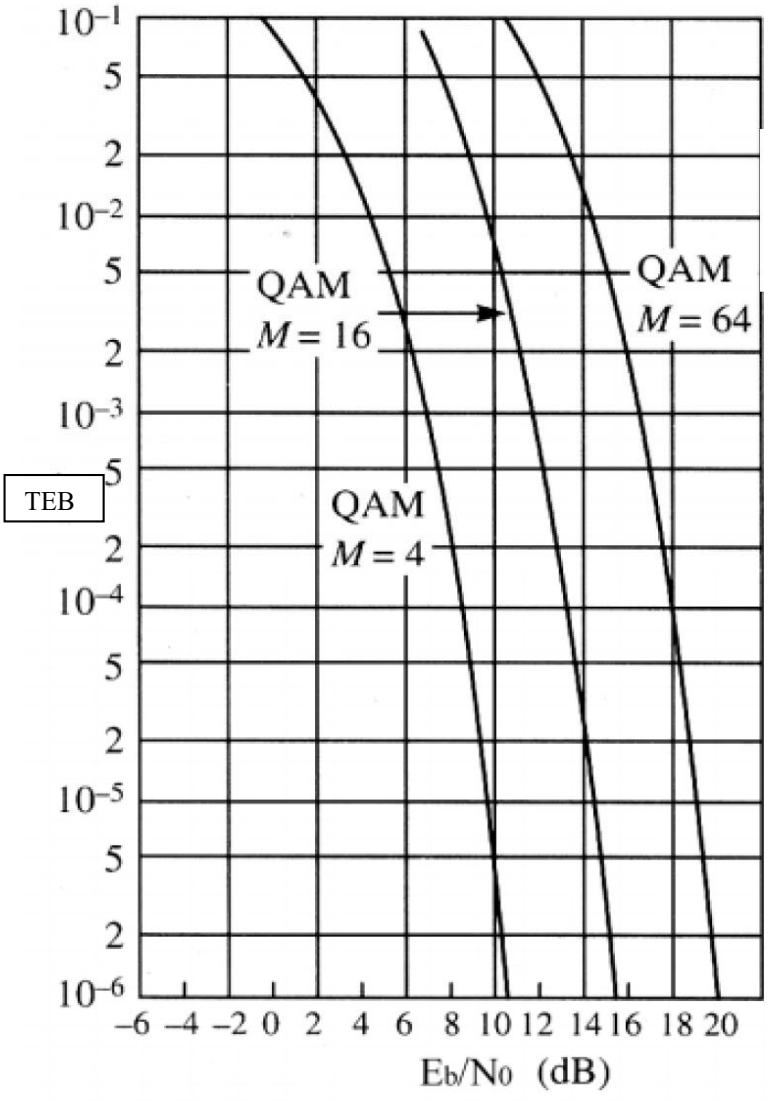
Dans le cas particulier mais très fréquent où M peut s'écrire $M = 2^n$, alors les *ak* représentent un mot de n bits et les bk représentent aussi un mot de n bits.

L'intérêt de cette configuration est **que le signal *m(t)* est alors obtenu par une combinaison de deux porteuses en quadrature modulées en amplitude par des symboles *ak et bk* indépendants**.Par exemple, la MAQ-16 est construite à partir de symboles *ak et bk* qui prennent leurs valeurs dans l'alphabet {+ ou - d, + ou - 3d} où d est une constante donnée. La modulation QAM consiste à associer à toute suite de n bits appelée symbole un point particulier au sein d'une constellation :



Plus généralement lorsque les symboles *ak et bk* prennent leurs valeurs dans l'alphabet {+ ou -d, + ou -3d, + ou -5d,…, + ou -(M-1)d} avec $M = 2^n$, on obtient une modulation à 2^{2n} états et une constellation avec un contour carré dont font partie la MAQ-4, la MAQ-16, la MAQ-64 et la MAQ-256.
Voici les occupations spectrales correspondant aux différentes modulations avec filtrage de Nyquist :

- 4-QAM symbole de 2 bits porteuse à 4 états B = (1 + α).D/2
- 16-QAM symbole de 4 bits porteuse à 16 états B = (1 + α).D/4
- 64-QAM symbole de 6 bits porteuse à 64 états B = (1 + α).D/6
- 128-QAM symbole de 7 bits porteuse à 128 états B = (1 + α).D/7
- 256-QAM symbole de 8 bits porteuse à256 états B = (1 + α).D/8



$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt, \quad x \geq 0$$

$$P_{\sqrt{M}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{(3\log_2 M) E_b}{(M-1) N_0}}\right)$$

$$P_M = 1 - (1 - P_{\sqrt{M}})^2$$

B=(1+α)Db/n
n : nbre de bit par symbole
Db débit binaire

2.3.4) Comparatif entre les différentes modulations numériques

Modulation	Nbr Etats	Efficacité Spectrale	E_b/N_0 pour un TEB=10^{-6}	Avantages	Inconvénients
PAM	2	1	10,5	-Démodulation par simple détection d'enveloppe -Avantageux si M < 2	-DSP proportionnelle à M -Sensible aux non-linéarités du système
	4	2	14,3		
	8	3	21		
PSK	2	1	10,5	-simple à réaliser -TEB meilleur que PAM -Enveloppe constante	-Limitée pour M > 8
	4	2	10,5		
	8	3	13,8		
DPSK	2	1	11,3	-Identiques à PSK -Plus simple à réaliser	Un peu moins performante que son homologue (PSK)
	4	2	12,8		
QAM	4	2	10,5	-η proportionnelle à M -TEB meilleur que PSK -Plus performant si M>8	-Enveloppe non constante -Complexité de réalisation si M>16
	16	4	14,3		
	64	6	20,5		
FSK		Efficacité liée aux fréquences porteuses	TEB dépend de Δ, indice de modulation	-Moins sensible au brouillage des canaux adjacents	-Occupation spectrale et TEB plus important que PSK et QAM
MSK	2	1,334	13,5	-η très bon	-TEB moins bon

Tableau 1 : Synthèse des différentes modulations.

$\frac{E_b}{N_0}$: Rapport signal sur bruit

La Bande Passante disponible ou indirectement l'efficacité spectrale dépend :

- du *type de canal* : câble, hertzien, satellite,
- du *type de propagation* (*la HF est la + contraignante*)
- des *effets du canal* : perturbations, fading, trajets multiples, atténuation,

2.3.5) Domaine d'utilisation des modulations numériques

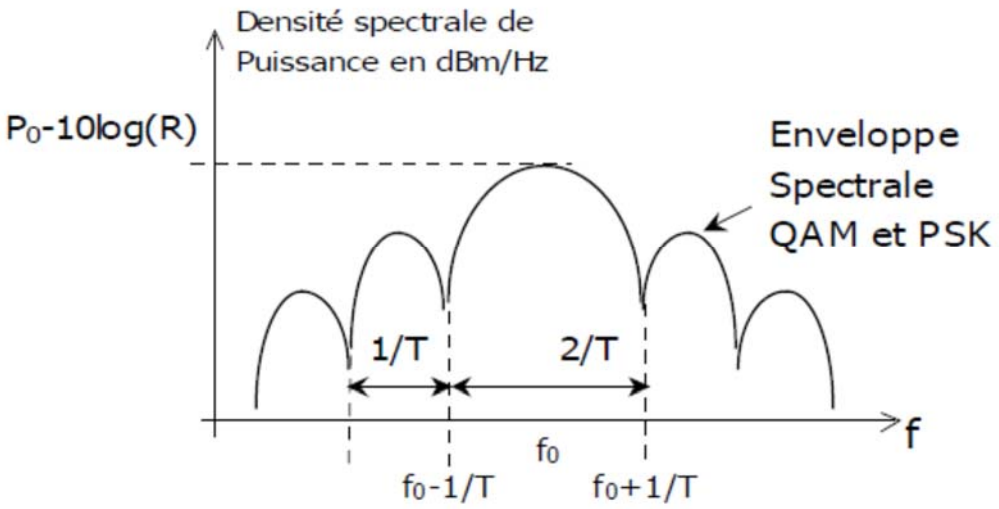
Format de modulation	Applications typiques
MSK, GMSK	GSM, CDPD GPS
BPSK	Télémétrie astronomique, modems câble RDS
QPSK, π/4 DQPSK	Satellite, CDMA, NADC, TETRA, PHS, LMDS, DVB-S, câble (voie retour), modems câbles, TFTS NICAM L11
OQPSK	CDMA, satellite
FSK, GFSK	DECT, "paging", données mobiles AM, AMPS, CT2, ERMES, mobiles terrestres, sécurité publique Minitel
8, 16 VSB	North American digital TV (ATV), câble hertzien
8PSK	Satellites, avions, pilotes de télémétrie pour surveillance des systèmes vidéo large bande GSM-EDGE
16 QAM	Radio numérique hyperfréquences, modems, DVB-C, DVB-T
32 QAM	Hyperfréquences terrestres, DVB-T
64 QAM	DVB-C, modems, décodeurs large bande, MMDS
256 QAM	Modems, DVB-C (Europe), vidéo numérique (US)
OFDM + QAM	TNT GSM-HSDPA
DMT+QAM	ADSL

Les transmissions par satellite sont caractérisées par une **forte atténuation** de l'espace et une **puissance limitée** de l'émetteur à bord du satellite. Ces considérations privilégient l'efficacité en puissance (l'immunité au bruit) contre l'efficacité spectrale des liaisons. Les modulations les plus souvent utilisées sont la MDP-2, la MDP-4 et la MDP-8
Avec ces modulations, l'amplificateur de puissance à bord du satellite peut être utilisé proche de sa saturation, ce qui permet d'employer efficacement la puissance disponible. Toutefois, on assiste aujourd'hui à un intérêt croissant à utiliser les modulations MDP-16 et MAQ-16 associées à un codage puissant. Le standard en Europe pour la radiodiffusion de la télévision numérique par satellite est basé sur une MDP-4.

Pour l'ensemble de ces modulations n-PSK et n-QAM, **le spectre est totalement identique**, tant que la vitesse de modulation *R* est la même pour toutes. En revanche, la valence *m* de ces modulations étant différente, le débit sera d'autant plus élevé que *m* est grand

$$R = \frac{1}{T} \qquad D = R \times log_2 M$$

Sur le spectre, il est alors possible de mesurer la vitesse avec une bonne précision.



Pour la

Synthèse (Liaison satellite)

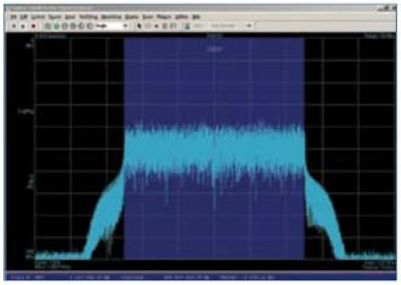
Contrainte :

- forte atténuation de l'espace
- puissance limitée de l'émetteur à bord du satellite

MDP-2 MDP-4 MDP-8 MDP-16 et MAQ-16

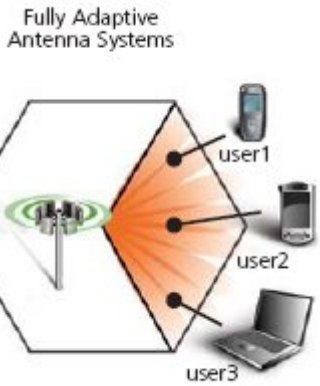
2.3.6) Modulation à grand nombre de porteuses OFDM:





Les techniques

de modulation COFDM





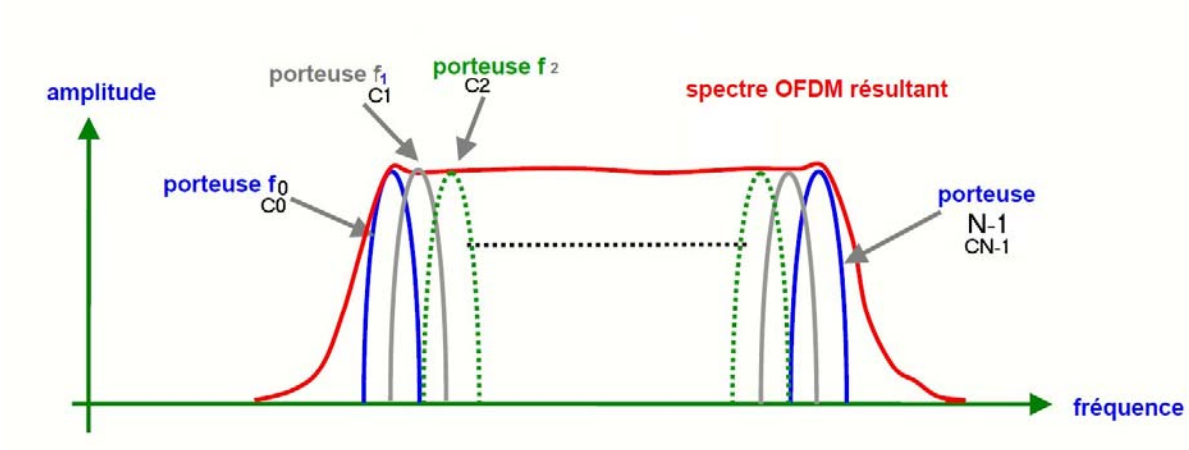
Les techniques de modulation COFDM

2.3.6.1) Présentation

Le COFDM (Multiplex par division de fréquence orthogonale) codée est un type de modulation particulièrement bien adapté aux besoins de la radiodiffusion par voie de Terre. Il s'accommode de niveaux élevés de propagation par trajets multiples et d'une gamme étendue de retards entre signaux reçus. Le COFDM a été choisi pour cinq nouvelles normes de radiodiffusion :DAB, la DVB-T, WIMAX, 4G, WIFI. Cette modulation obtient des résultats exceptionnels en matière de trajets multiples et de brouillages.

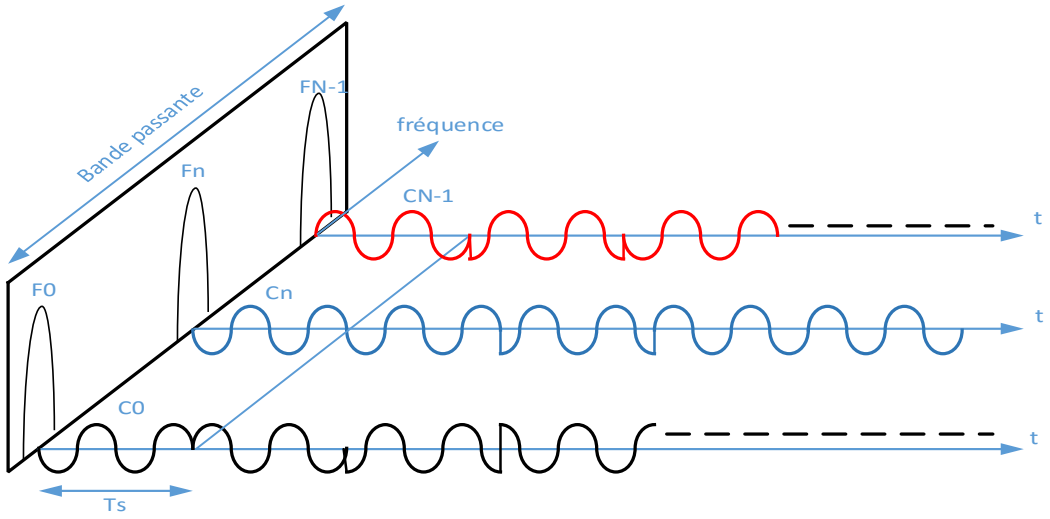
2.3.6.2) Principe

Les modulations multiporteuses OFDM consistent à répartir les symboles sur un grand nombre de porteuses à bas débit. A l'opposé des systèmes conventionnels qui transmettent les symboles sur une seule porteuse, chaque symbole occupant alors toute la bande passante disponible.



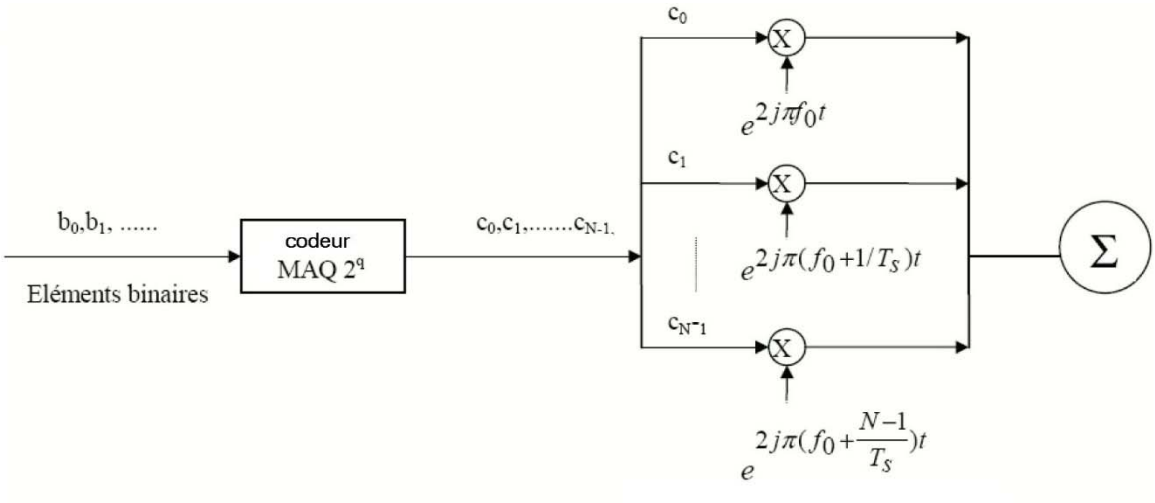
Ainsi dans le cas de l'OFDM pour un train de symboles initial de période *Tsi ;* les symboles seront repartis en N trains plus lents et auront alors une durée Ts = N· TSi

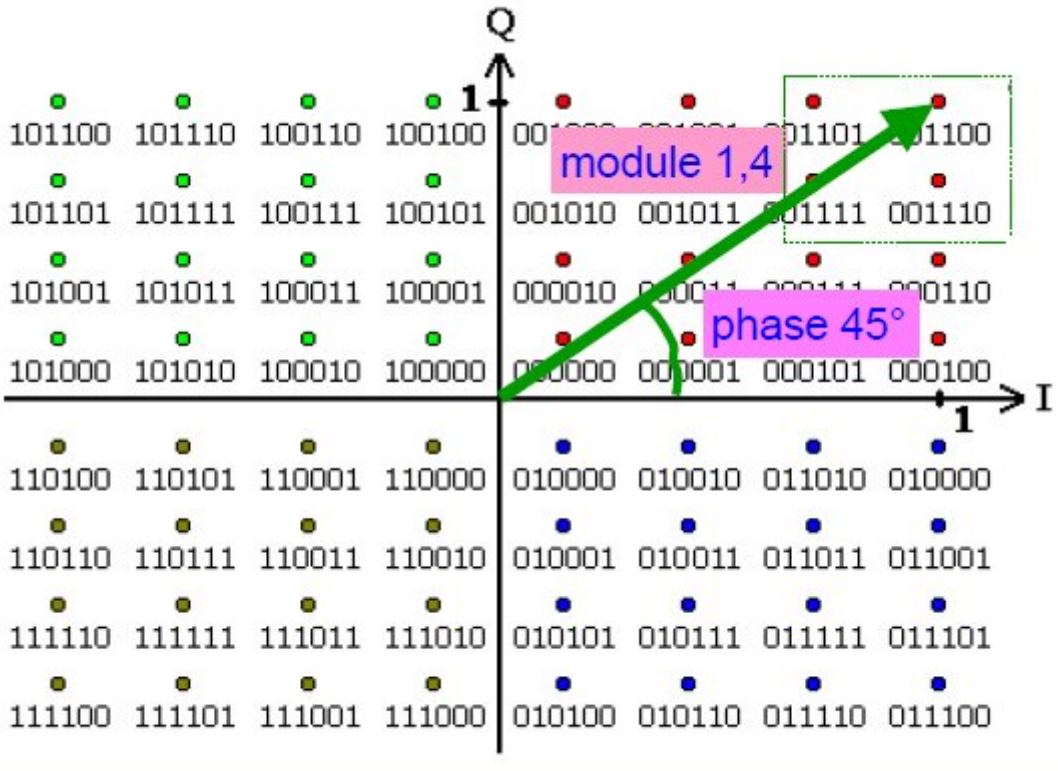
Cette diminution du rythme symbole entraine une diminution des interférences entre symbole d'un rapport N



2.3.6.3) Codage

On va répartir les données à transmettre sur N porteuses et créé N symboles ck différents. Les ck sont des nombres complexes définis à partir d'une séquence binaire par une constellation du type MAQ4, MAQ16, MAQ32, MAQ64. C'est le rôle du codeur binaire d'établir un symbole sur la constellation à partir d'une séquence binaire. Chaque symbole Ck modulera une porteuse :

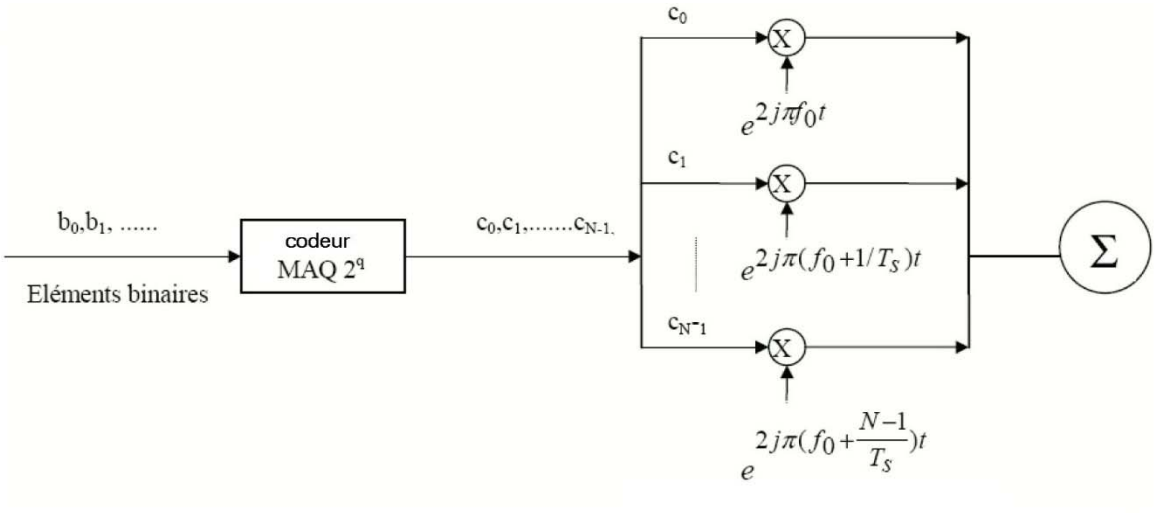




Pour le mot binaire 001100 la valeur du symbole MAQ CK codé sera :

$$Ck = 1.4 \times e^{j\times 45}$$

La séquence de N symboles c0, c1, …..CN-1 constitue un symbole OFDM



Considérons une séquence de N données c0, c1,....cN-1

$$Ck = ak + j \times bk$$

2.3.6.4) L'expression temporelle

Appelons TS la durée symbole c'est-à-dire le temps qui sépare 2 séquences de N données. Chaque donnée ck module un signal à la fréquence fk.

Le multiplexage est orthogonal si l'espace entre les fréquences est de 1/Ts.

$$s(t) = e^{j2\pi fot} \times \sum_{k=0}^{N-1} ck \times e^{\frac{2\times\pi\times j\times k\times t}{Ts}}$$

S(t) : Signal temporel de la COFDM

$$fk = f0 + \frac{k}{Ts}$$

Plus précisément les données numériques ck sont des nombres complexes définis à partir d'éléments binaires par une constellation (mapping) de modulation d'amplitude en quadrature MAQ à plusieurs états (4, 16, 64, de façon générale à 2q états). Ces données sont des symboles q-aires formés par groupement de q bits. On les appelle symboles numériques. Il ne faut pas les confondre avec le symbole OFDM qui est un regroupement de N symboles numériques su N porteuses.

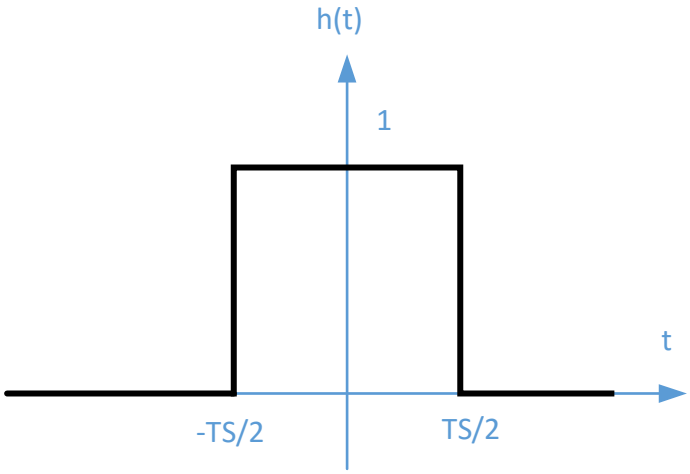
On peut déduire l'expression réelle du signal :

$$Si\ ck = ak + j \times bk$$

$$S(t) = R(s(t)) = R(e^{j2\pi fot} \times \sum_{k=0}^{N-1} (ak + jbk) \times e^{\frac{2\times\pi\times j\times k\times t}{Ts}}) \times h(t - k \times Ts)$$

Avec $h(t - k \times Ts)$ la fenêtre rectangulaire.

fo est la fréquence centrale des porteuses et $h(t - k \times Ts)$ la forme d'onde rectangulaire, La forme d'onde rectangulaire est due à l'échantillonnage subi par les différents symboles toutes les périodes symboles Ts



On a la transformée de fourrier de $h(t)$:

$$F[h(t)] = \frac{\mathrm{Ts} \times \sin(\pi \times TS \times f)}{(\pi \times TS \times f)}$$

$$S(t) = R(s(t)) = R[(ak + j \times bk) \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2 \times \pi \times (f0 + \frac{k}{TS}) \times t) + j \times \sin(2 \times \pi \times t(f0 + \frac{k}{TS})] \times h(t - KTS)$$

$$S(t) = R(s(t)) = \sum_{k=0}^{N-1} (\mathrm{ak} \times \cos\left(2 \times \pi \times (f0 + \frac{k}{TS}) \times t\right) - bk \times \sin(2 \times \pi \times t(f0 + \frac{k}{TS})) \times h(t - k \times Ts)$$

$$S(t) = R(s(t)) = \sum_{k=0}^{N-1} (\mathrm{ak}/2 \times (e^{2\times\pi\times j\times t\left(fo+\frac{k}{TS}\right)} + e^{-2\times\pi\times j\times t\left(fo+\frac{k}{TS}\right)}) - bk/2j \times (e^{2\times\pi\times j\times t\left(fo+\frac{k}{TS}\right)} - e^{2\times\pi\times j\times t\left(fo+\frac{k}{TS}\right)})) \times h(t - k \times Ts)$$

2.3.6.5) L'expression fréquentielle

Soit S(f) le spectre de la modulation COFDM

$$S(f) = F(s(t)) = h(f) \times e^{-2\times\pi\times j\times f\times k\times Ts} \sum_{k=0}^{N-1} \left(ak/2 \times ((\delta(f - fo - \frac{K}{Ts}\right) + \delta(f + fo + \frac{K}{Ts})) - bk/2j \times (\delta\left(f - f0 - \frac{k}{Ts}\right) - \delta\left(f + f0 + \frac{K}{Ts}\right))$$

$$S(f) = e^{-2\times\pi\times j\times f\times k\times Ts} \sum_{k=0}^{N-1} \left(ak/2 \times ((h(f - fo - \frac{K}{Ts}\right) + h(f + fo + \frac{K}{Ts})) - bk/2j \times (h\left(f - f0 - \frac{k}{Ts}\right) - h\left(f + f0 + \frac{K}{Ts}\right))$$

En ne gardant que la partie positive du spectre

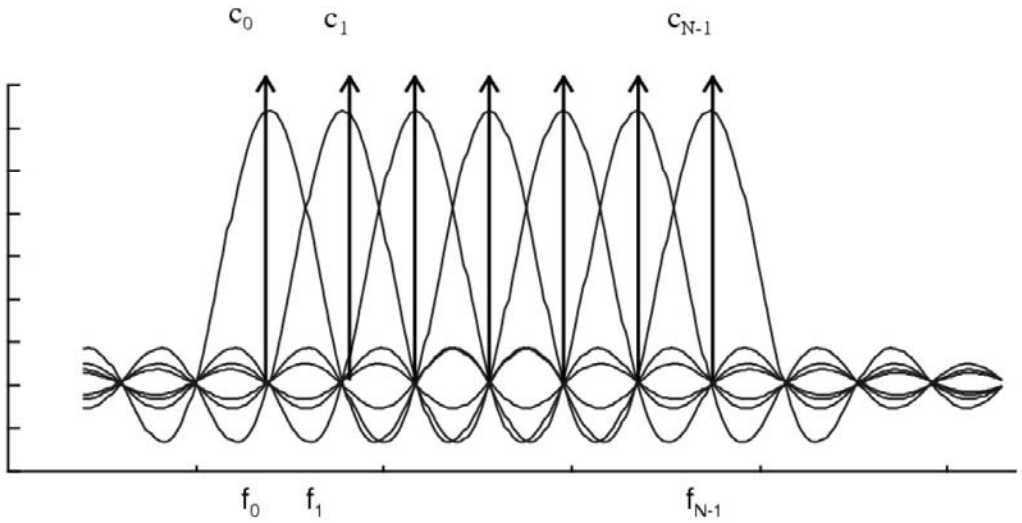
$$S(f) = e^{-2\times\pi\times j\times f\times k\times Ts} \sum_{k=0}^{N-1} \left(ak/2 \times ((h(f - fo - \frac{K}{Ts}\right)) - bk/2j \times (h\left(f - f0 - \frac{k}{Ts}\right))$$

$$S(f) = e^{-2\times\pi\times j\times f\times k\times Ts} \sum_{k=0}^{N-1} \left((h(f - fo - \frac{K}{Ts}\right)) \times \frac{1}{2}(ak - \frac{bk}{j})$$

$$|S(f)| = \sum_{k=0}^{N-1} \left((h(f - fo - \frac{K}{Ts}\right)) \times \frac{1}{2}\sqrt{ak^2 + bk^2}$$

$$|S(f)| = \sum_{k=0}^{N-1}\left(Ts \times \frac{\sin(\pi \times TS \times (f - fo - \frac{K}{TS})}{(\pi \times TS \times (f - f0 - \frac{K}{TS})}\right)) \quad \times \frac{1}{2}\sqrt{ak^2 + bk^2}$$

$$f_k = f_0 + \frac{k}{T_S}$$



Les fréquences sont orthogonales si l'espace entre deux fréquences adjacentes est 1/TS. En effet claque porteuse modulant un symbole pendant une fenêtre rectangulaire temporelle de durée Ts. son spectre en fréquence est un sinus cardinal, fonction qui s'annule tous les multiples 1/Ts. Ainsi, lorsque l'échantillonnage est effectué précisément à la fréquence f_K d'une sous-porteuse, il n'y a aucune interférence avec les autres sous-porteuses.

Reprenons l'expression suivante :

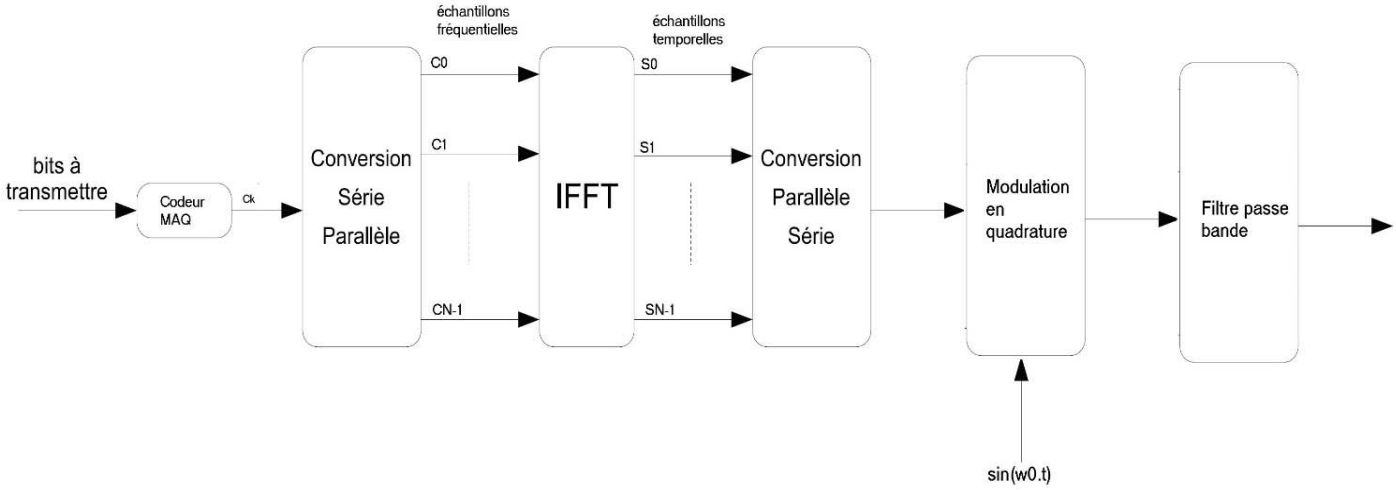
$$S(t) = R(s(t)) = R(e^{j2\pi fot} \times \sum_{k=0}^{N-1}(ak + jbk) \times e^{\frac{2\times\pi\times j\times k\times t}{Ts}}) \times h(t - k \times Ts)$$

2.3.6.6) La structure du codeur

On peut faire apparaitre dans l'expression précédente la transformée de fourrier inverse

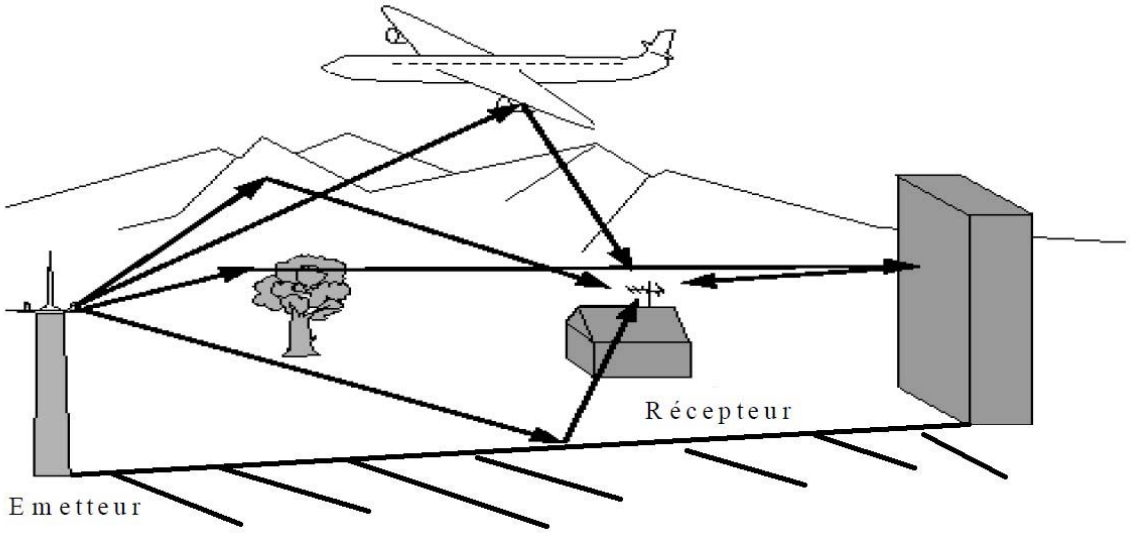
$$\sum_{k=0}^{N-1}(ak+jbk)\times e^{\frac{2\times\pi\times j\times k\times t}{Ts}}=\sum_{k=0}^{N-1}ck\times e^{\frac{2\times\pi\times j\times k\times t}{Ts}}$$

La structure du codeur COFDM est donnée ci-dessous

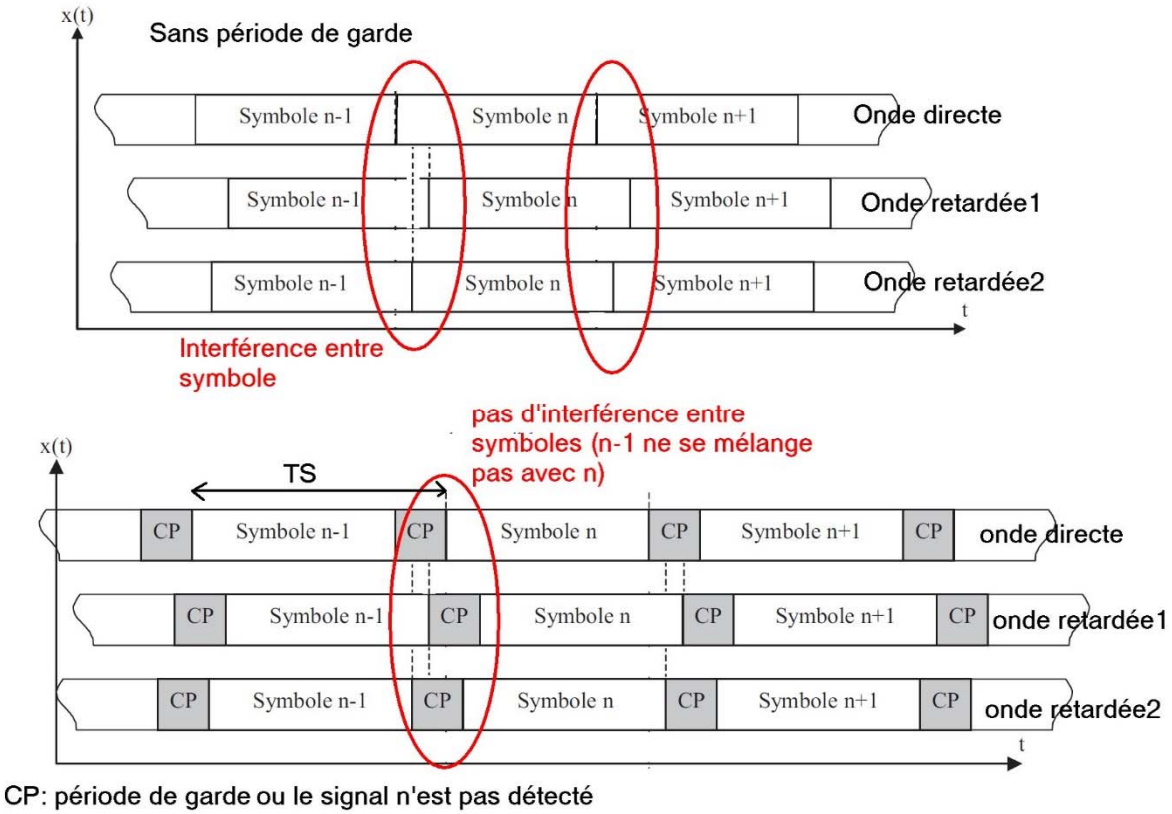


2.3.6.7) L'annulation de l'effet des échos

Du fait du trajet multiple que peut prendre une onde suite aux réflexions multiples, une antenne peut recevoir différents ondes retardés (échos) en même temps que l'onde directe.



Soit une fréquence porteuse parmi les N porteuses que l'on représente ci-dessous. Du fait des propagations multiples on observera sur l'aérien de l'antenne une onde directe et des ondes retardées. Si les symboles se suivent on observe de l'interférence entre symboles (le symbole n-1 se mélange avec le symbole n). Pour éviter l'interférence entre symbole on rajoute une période de garde CP entre symboles. La durée de la période de garde représente 1/4 à 1/32 de la période symbole TS.



CP: période de garde ou le signal n'est pas détecté

2.3.6.8) Quelques exemples de normalisation

La DVB-T

Paramètres	Mode de transmission							
Porteuses pour véhiculer le signal	Mode 2k (1705 porteuses)				Mode 8k (6817 porteuses)			
Durée symbole utilie Ts	224us				896us			
Durée intervalle de garde	56us	28us	14us	7us	224us	112us	56us	28us
Distance entre 2 émetteurs	17km	9km	4km	2km	67km	34km	17km	9km
Débit net (Mbits/s) 64-QAM 2/3	19,91	22,12	23,42	24,13	19,91	22,12	23,42	24,13

Exemple pour la TNT

Pour la future TV numérique terrestre, on a choisi une modulation OFDM 8K, soit N = 8.1024 = 8192 porteuses, dont 6818 effectivement utilisées.

L'espacement entre les porteuses est de 1116 Hz et la durée du bit Ts = 1/1116 = 896 µs
La bande totale occupée est de : B = 6818.1116 = 7 ,61 MHz

La différence de trajet maximale L correspondant à la durée d'un bit s'écrit :
L = c.Ts = 300000. 0,000896 = 270 km

La modulation OFDM 8K permet donc d'émettre le même programme dans les même canaux à condition que les différents émetteurs que peut capter un récepteur donné se trouvent à moins de 200 km.

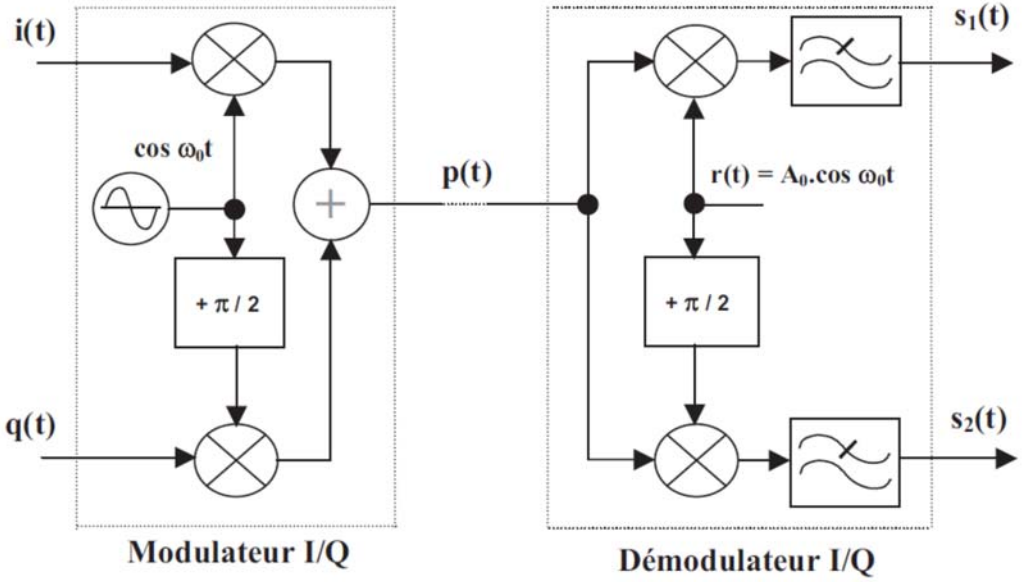
Cette condition est largement vérifiée dans la bande UHF analogique actuelle à cause de la portée limitée des émetteurs liée à la courbure de la Terre.



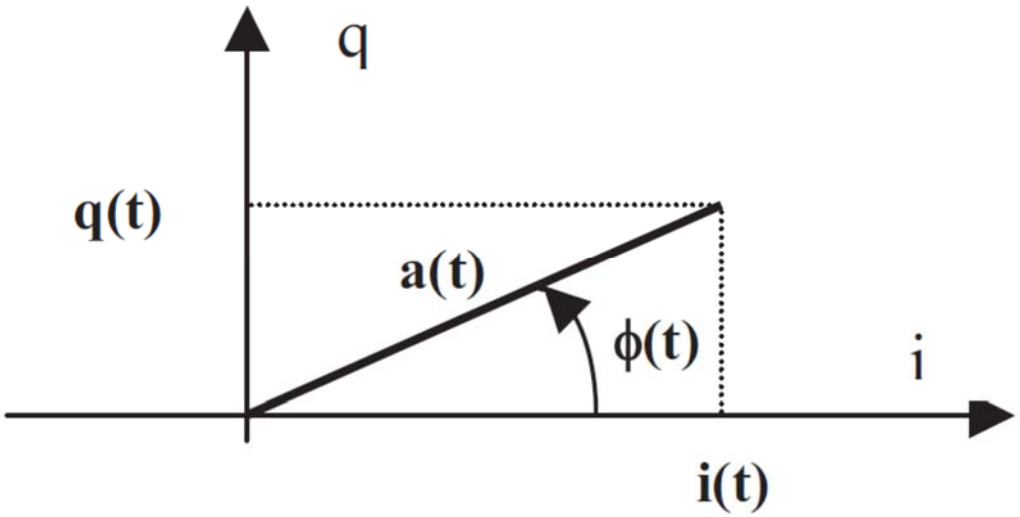
TD Sur les modulations numériques

Exercice N°1

Le schéma de principe d'un modulateur/démodulateur I/Q est le suivant :

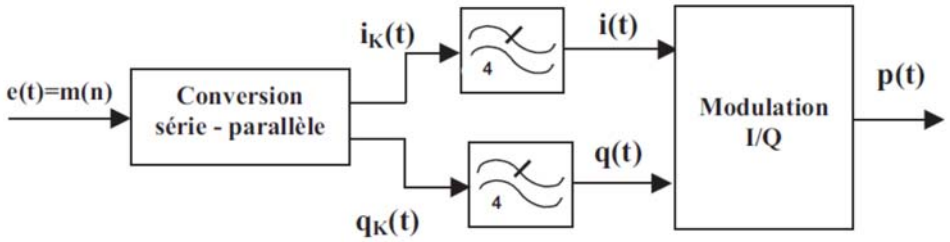


a) Exprimer p(t) en fonction de i(t) et de q(t)
b) Déterminer s1(t) et s2(t) et conclure.
c) Les signaux i(t) et q(t) issus du signal déterministe a(t) et modulant en quadrature la porteuse sont définis, dans le plan (i,q), comme suit :



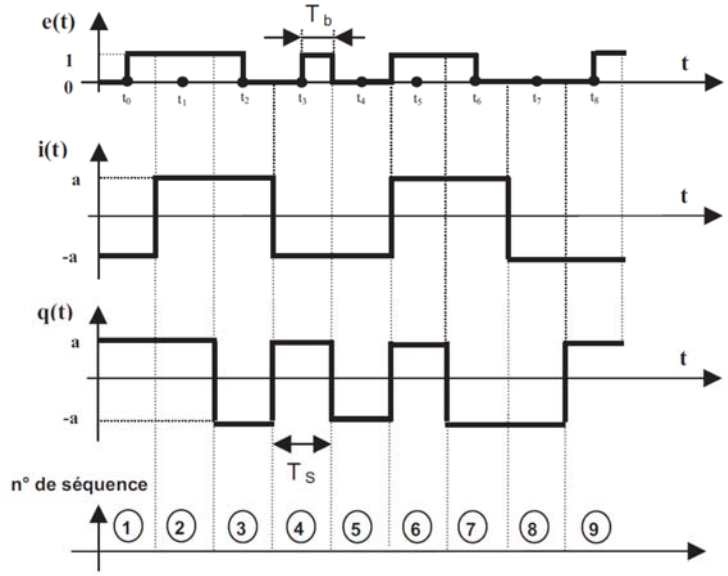
Montrer, à partir du schéma de principe du modulateur I/Q , qu'une modulation QAM équivaut à une double modulation d'amplitude et de phase.

Dans le cas des transmissions de signaux numériques le signal modulant est constitué d'une suite numérique m(n). Le flot m(n) est scindé en deux flots numériques iK et qK comme suit :



Dans le cas d'une modulation numérique de type QAM-4, les quatre états de la porteuse modulée sont obtenus avec les deux composantes iK et qK . Un état correspond donc à un *symbole* composé de 2 bits. De plus l'amplitude a(t) est constante et vaut a

La conversion série – parallèle fournit, **sans tenir compte du filtrage,** les signaux i(t) et q(t) suivants :



T_b est la période correspondant au *débit binaire*

T_S est la *période symbole*, un symbole étant constitué, dans le cas de la modulation QAM-4 de deux bits.

d) Représenter, dans le plan (i,q) , les *trajectoires* représentatives des évolutions des états de modulation de la porteuse en y notant les points représentatifs des séquences.

e) Représenter, dans un nouveau plan (i,q) , les points particuliers de ces états correspondant, en démodulation, aux instants tK de décision (cette représentation s'appelle une *constellation*).

On repérera ces points par les valeurs du dibit (iK,qK) correspondant.

f) Représenter les trajectoires et la constellation dans le cas de la QAM-16 (un état de la porteuse modulée correspond à une combinaison logique de 4 bits).

Dans le cas d'une modulation par déplacement de phase (**PSK** = **P**hase **S**hift **K**eying), la phase $\Delta\psi$ de la porteuse modulée peut prendre M valeurs (modulations dites M-aire) réparties régulièrement de 0 à 2π soit :

$$\Delta\Psi = \left\{ \pm\frac{\pi}{M};\quad \pm\frac{3\pi}{M};\quad \ldots;\quad \pm\frac{(M-1)\pi}{M} \right\}$$

Le signal p(t) s'écrit donc : p(t) = cos(2*π*f0.t+Δψ)

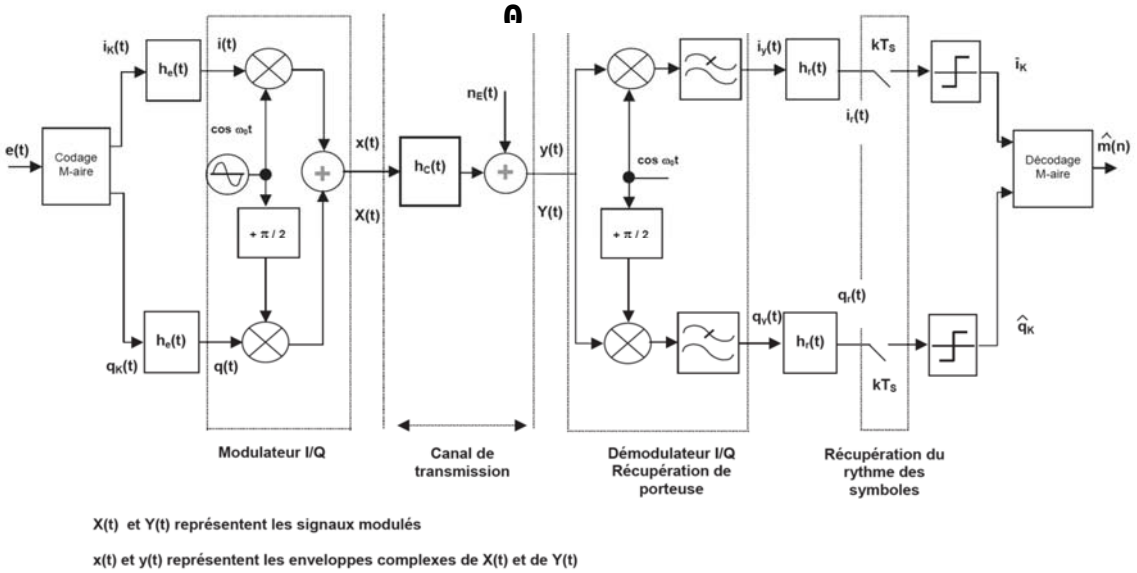
g) Montrer que cette modulation peut être réalisée à partir de la modulation de deux porteuses en quadrature par deux signaux i(t) (porteuse en phase) et q(t) (porteuse en quadrature) dont on donnera les expressions.

h) Représenter, dans le plan (i,q) , la *constellation* des états de la porteuse modulée en quatre états de phase (**QPSK** = **Q**uaternary **P**hase **S**hift **K**eying) puis celle de la 8-PSK (M=8).
Que peut-on dire des modulations QAM-4 et QPSK ?

i) Justifier le fait que les transmissions numériques de télévision par satellite utilisent une modulation de type QPSK et que celles par câble utilisent une modulation QAM-64

La modélisation de la chaîne de transmission de signaux numériques est donnée par le schéma fonctionnel ci-dessous

Modélisation de la chaîne de transmission de signaux numériques



X(t) et Y(t) représentent les signaux modulés

x(t) et y(t) représentent les enveloppes complexes de X(t) et de Y(t)

Les signaux i(t) et q(t) sont à bande étroite.
L'ensemble formé par le filtre d'émission he(t), le canal de transmission hC(t) et le filtre de réception hr(t) constitue un filtre équivalent en bande de base de réponse non constante en fréquence et se comporte comme un système dispersif. Cette dispersion provoque le phénomène d'**I**nterférence **E**ntre **S**ymboles (IES) qui consiste, à la réception, en un chevauchement partiel de certains symboles adjacents.
La condition limite 2B = 1/TS conduit à un gabarit pour HT(f) parfaitement rectangulaire, ce qui n'est pas réalisable. En deçà de cette limite il existe de nombreux choix possibles dont le plus utilisé est celui basé sur les fonctions dites en *cosinus surélevé*.

j) Donner la raison principale pour laquelle il est impératif de filtrer les signaux numériques $i_k(t)$ et $q_k(t)$

k) Exprimer la bande passante BT de la chaîne de transmission en fonction de a et de TS

l) En déduire le débit symbole Ds sans IES en fonction de a et de BT

m) En déduire le débit binaire Db sans IES en fonction de a , BT et M (modulations M-aire)

n) En déduire l'efficacité spectrale Db/BT (en bit.s-1.Hz-1) maximale sous forme littérale puis sous forme numérique pour les modulations : BPSK (Biphase Shift Keying), QPSK, 8-PSK, QAM-16, QAM-64 et QAM-256

Exercice N°2

L'objectif de ce problème est la mise en évidence des caractéristiques générales (constellation, spectre, encombrement spectral) d'un modem utilisant la modulation QAM (Quadrature Amplitude Modulation). L'exemple proposé est celui de la recommandation V29 (modulation datant des années 80).
La modulation utilisée est une modulation de type MAQ dont la fréquence porteuse est 1700 Hz, ils correspondent à 4 bits b0, b1, b2 et b3, dans l'ordre d'arrivée à l'entrée du codeur.
Le codage est le suivant :

b_3	b_2	b_1	Changement de phase en °
1	0	0	0
0	0	0	+45
0	1	0	+90
1	1	0	+135
1	1	1	+180
0	1	1	+225
0	0	1	+270
1	0	1	+315

Puis

Phase absolue	b_0	Amplitude relative
0, 90, 180, 270	0	3
	1	5
45, 135, 225, 315	0	$\sqrt{2}$
	1	$3\sqrt{2}$

Le débit utile est de 9600 bit/s.
a) Représenter les points de la constellation correspondant à la transmission du train de bits suivant: 10011000101001110101.
b) Quelle est la bande occupée (lobe principale théorique) en bande de base ($e(t)$ au format NRZ) pour transmettre 9600*bit/s* ?. Quelle est la rapidité de modulation et la bande occupée du signal modulée $s(t)$.



c) Sachant que la bande passante d'une ligne téléphonique est [300*Hz* , 3400*Hz*], Comparer l'occupation spectrale d'un tel signal et la largeur de bande disponible sur la ligne téléphonique. Conclusion?

Exercice N°3

Un faisceau hertzien numérique permet de transmettre dans la bande [15.25 - 15.35]GHz un débit de 2 Mbits/s grâce à une modulation à 2 états (BPSK soit PSK 2 états).

a) Calculer la rapidité de modulation.

b) D'après la formule de Nyquist, quelle bande passante minimale est nécessaire pour transmettre un tel débit de symbole.

c) Quelle est l'occupation spectrale théorique totale d'un signal BPSK.

On désire transmettre avec la même bande passante un débit de 8 Mbits/s.

d) Quelle doit être la valence du signal modulé?

Exercice N°4

On désire transmettre de l'information à un débit binaire *Db* = 100*Mbit/s* sur un canal passe-bande dont la largeur de bande est *B* = 20*MHz*, et en utilisant une modulation d'amplitude et de phase combinées M-QAM. Le filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé utilisé à un coefficient de roll-off α = 0,2.

a) Quel est le nombre minimum *Mmin* de points de la constellation appropriée M-QAM qu'on doit utiliser ? Justifiez votre réponse.

b) Calculer le temps bit *Tb* et le temps symbole *Ts*.

c)) Déterminer la valeur minimale du rapport Eb/N0 (rapport de l'énergie moyenne par bit/densité de bruit) requis afin de réaliser une probabilité moyenne d'erreur par bit $Pb \leq 10^{-5}$ (utiliser les courbes ci-dessous).

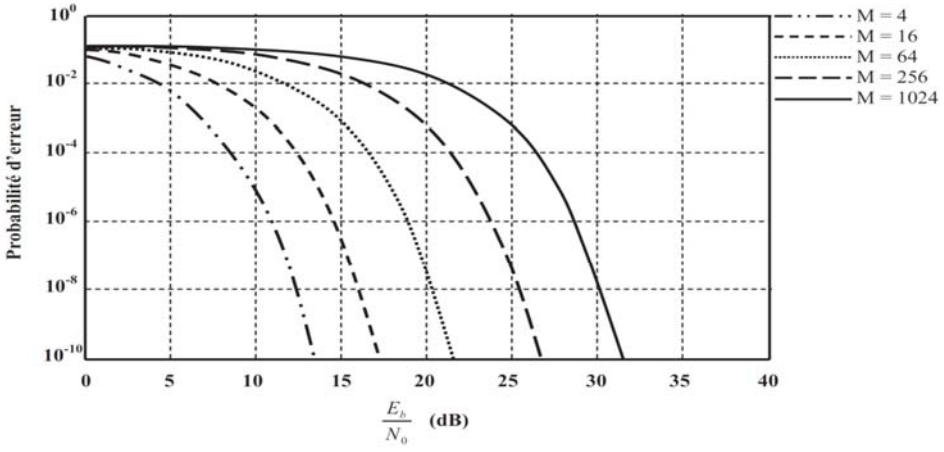


FIG. 1 – Probabilité d'erreur en fonction du $\frac{E_b}{N_0}$ pour différentes valeurs de M dans le cas d'une modulation M-QAM.