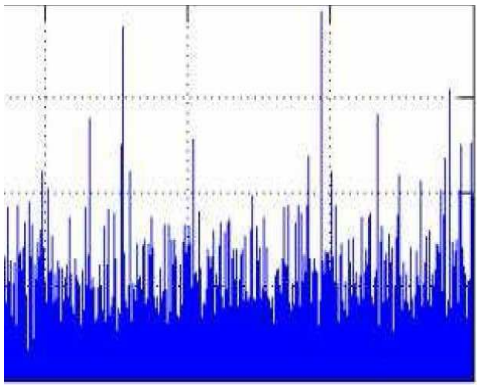
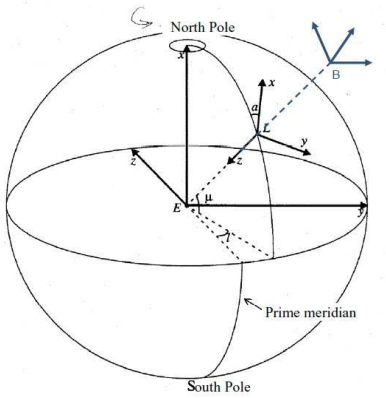
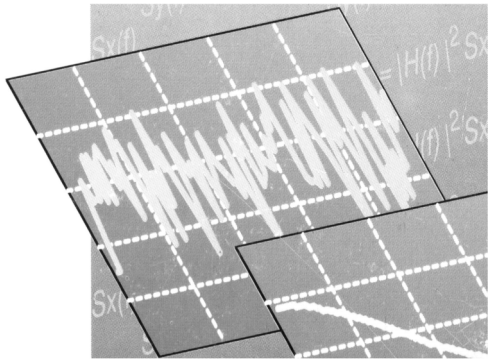




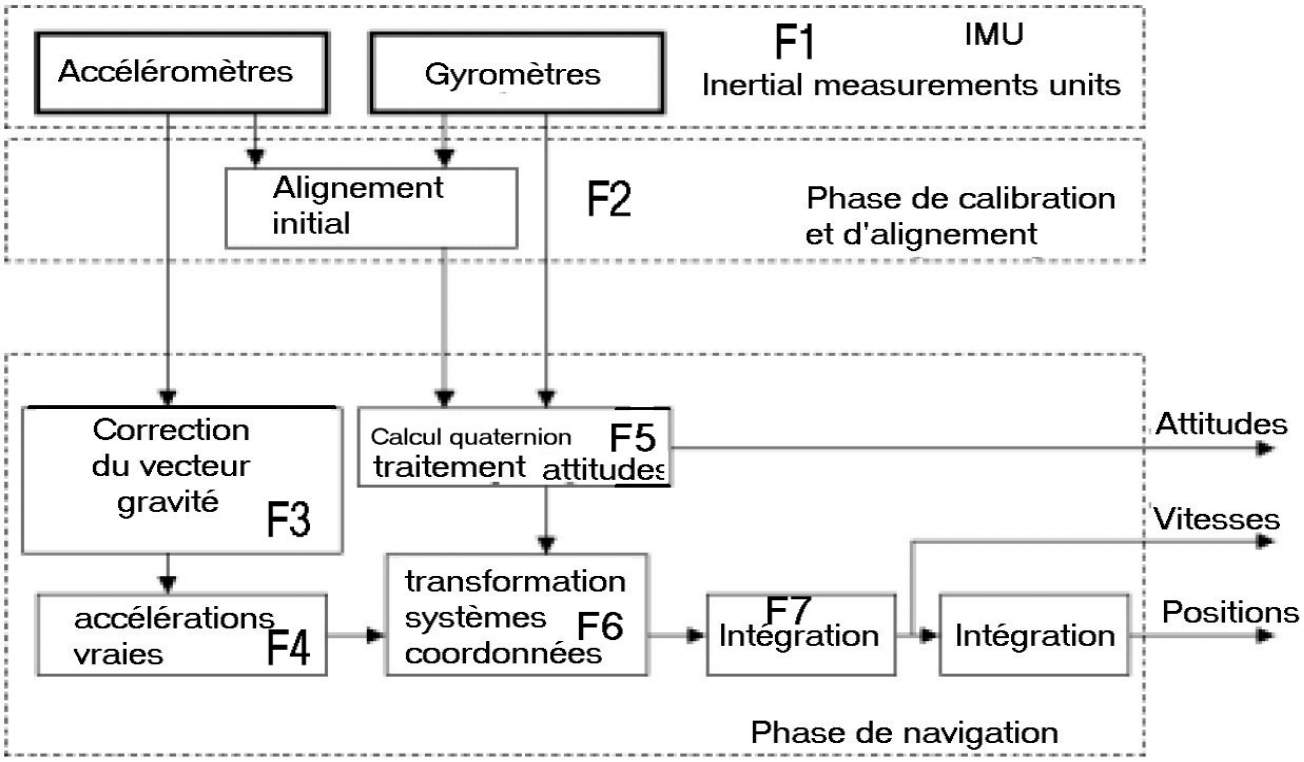
Etude des traitements de donnée dans une centrale inertielle du type INS-Strapdown Inertial navigation system





1) Principe d'une INS (Inertial navigation system)

Le schéma de principe est donné ci-dessous :

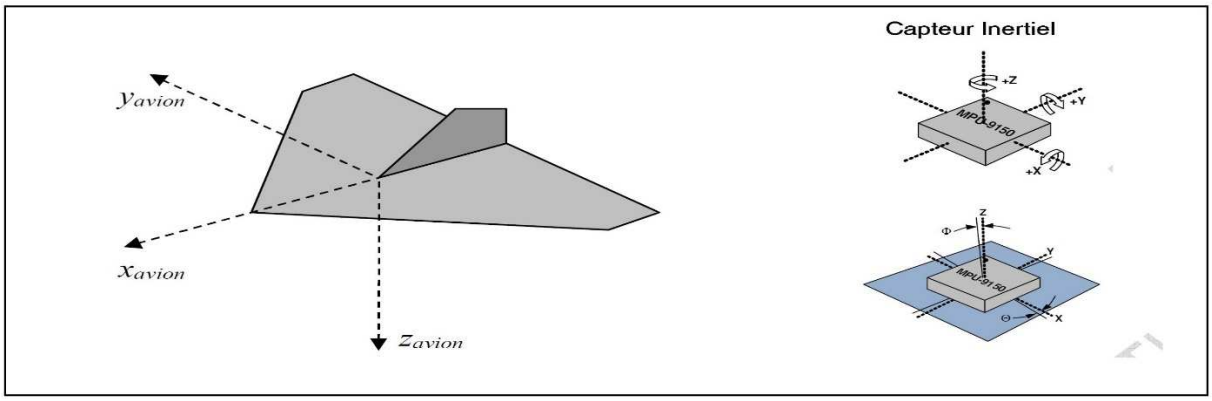


INS Inertial navigation system

L'INS contient habituellement 3 accéléromètres installés orthogonalement et 3 gyromètres installés aussi orthogonalement. Quand les accéléromètres et les gyromètres sont directement installés dans le corps du véhicule, l'INS est appelé strapdown.

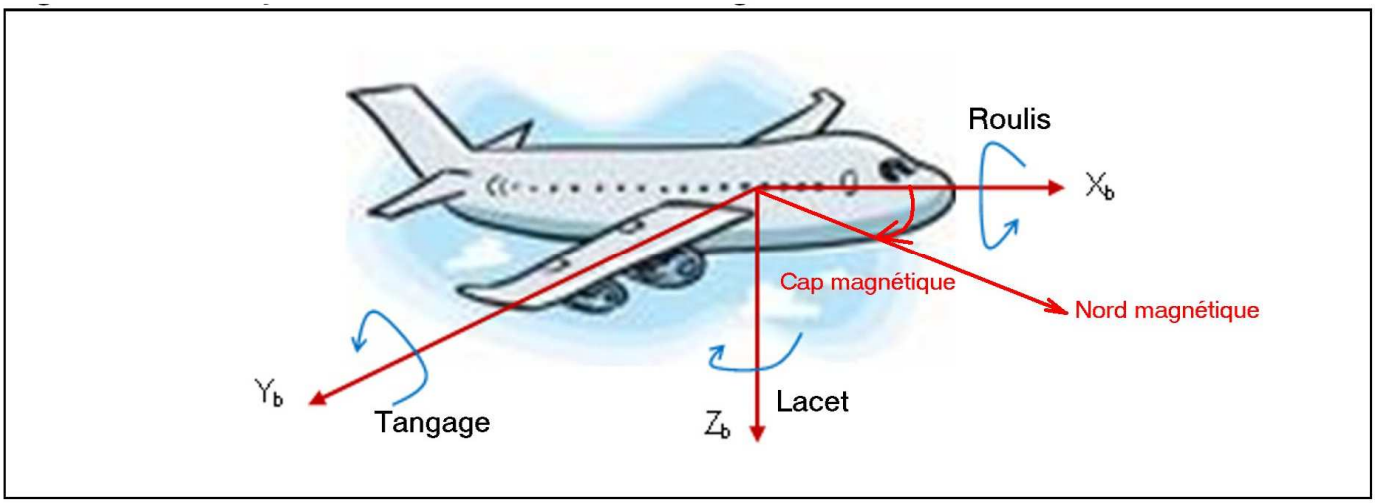
1.1) Les données inertielles

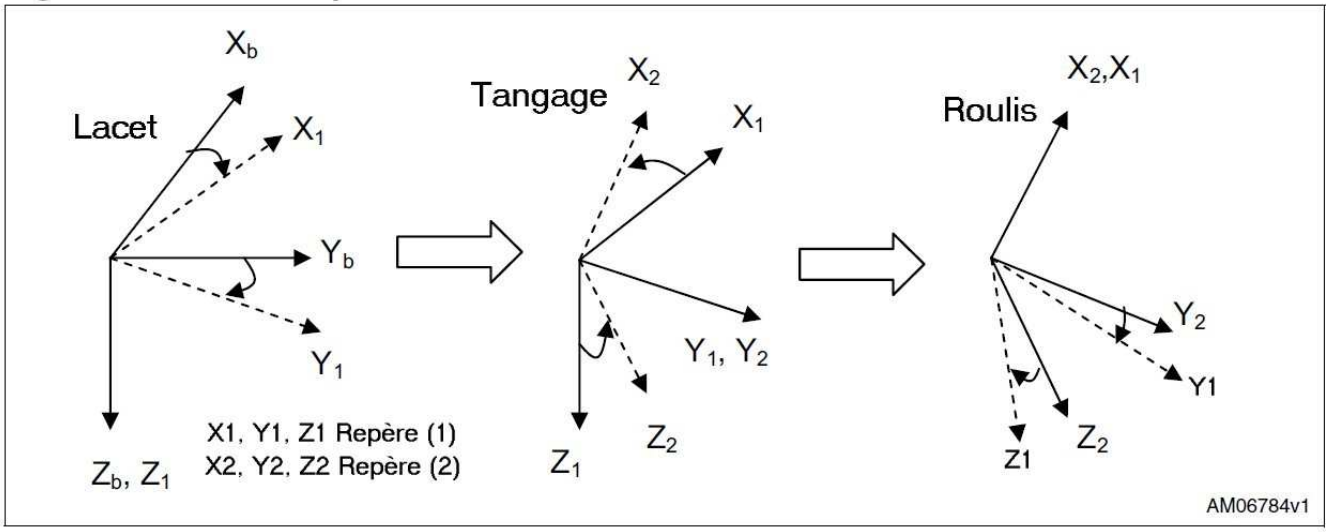
L'INS doit mesurer les angles d'attitude du corps en mouvement par rapport à un repère X, Y , Z. Le repère X, Y, Z est choisi par rapport aux éléments géométriques du véhicule de l'avion ou du bateau. L'IMU et ses capteurs doivent être orientés dans la direction du repère définie précédemment



La référence Avion ou body

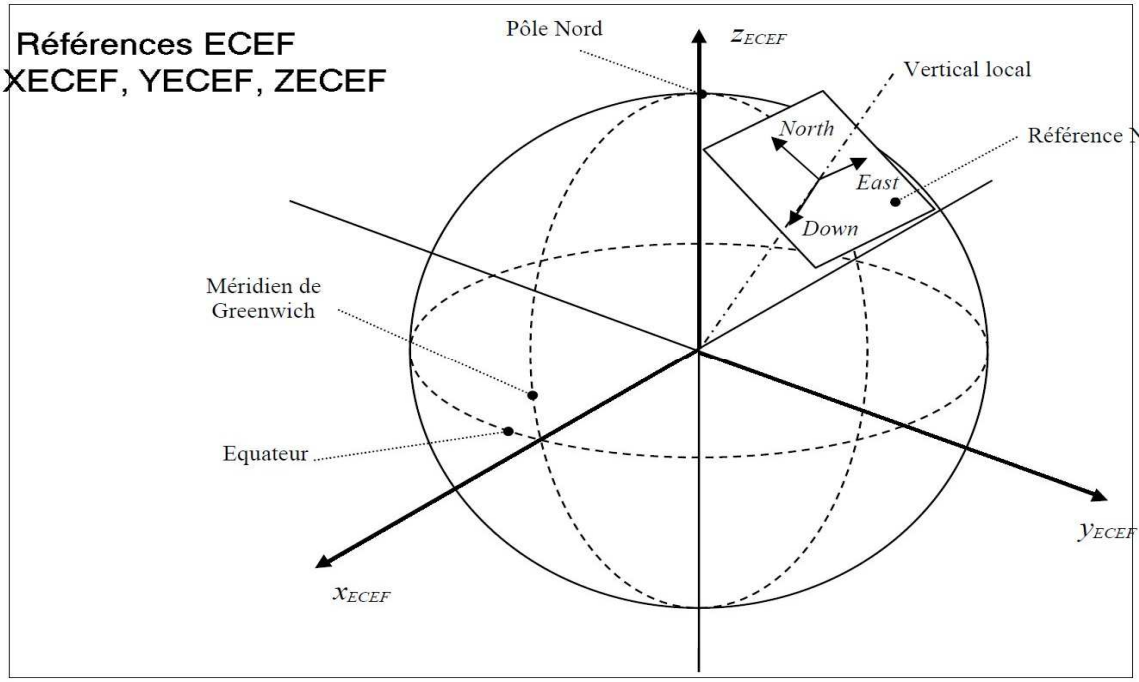
Ce repère ou cette référence est appelé le repère body.
On définit par rapport aux repères body trois angles le roulis, le lacet, le tangage qui sont appelés les informations d'attitude.





L'INS permet de calcul la position et la vitesse inertielle d'un repère par rapport à un autre.

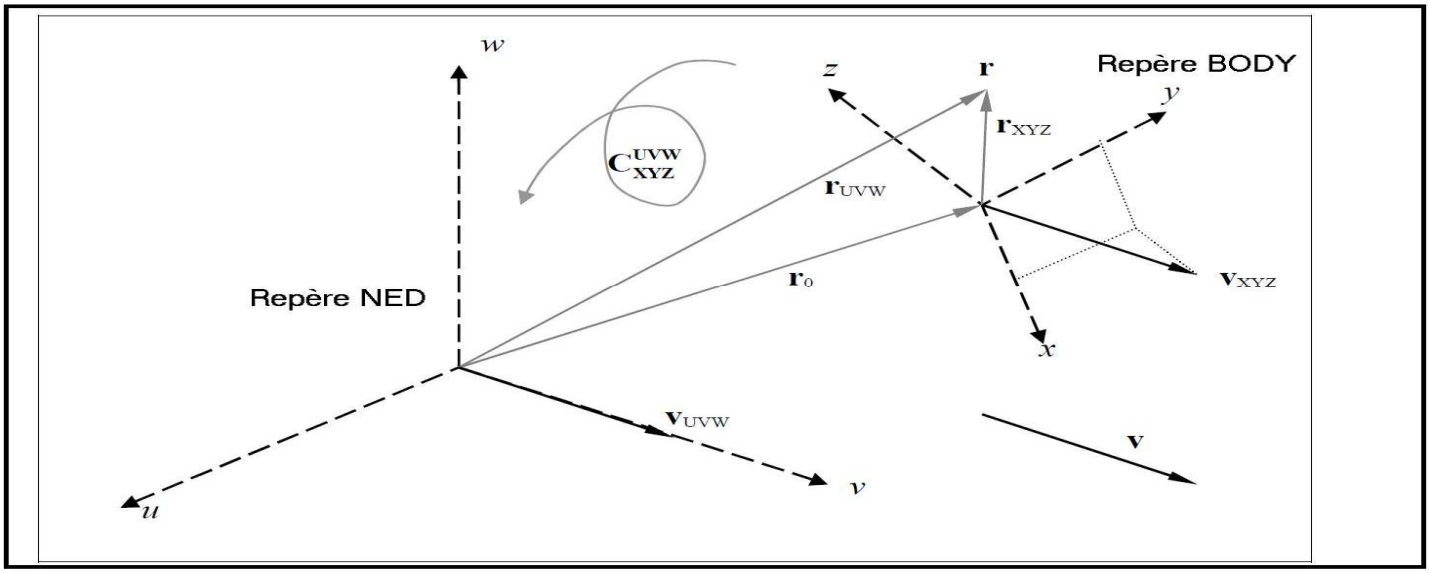
Ils existent 3 repères :



Les références ECEF et NED

- Le système de références ou repère NED (ci-dessus) prend comme origine de coordonnées un point fixé sur la surface terrestre. L'axe *x* est dirigé vers le Nord, l'axe *y* vers l'Est, et l'axe *z* vers le centre de la Terre (d'ici son nom NED : Nord, Est, Down). Il tourne avec la Terre de façon à maintenir sa définition à tout instant. Ce système de référence sera notre repère
- La référence ou repère terrestre non inertielle ECEF (*Earth-Centred, Earth-Fixed*) a son origine au centre de la Terre. L'axe *z* est dirigé vers le pôle Nord, l'axe *x* vers l'intersection de l'équateur avec le méridien de Greenwich, et l'axe *y* vers l'Est (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**ci-dessus). Elle tourne aussi avec la Terre.
  Le récepteur GPS donne des mesures de positon et vitesse référencées à ce système.
- Le corps body vue précédemment

Les grandeurs inertielles obtenues seront mesurées par rapport au repère NED et le repère body.



Le passage du repère NED et du repère BODY se fait par la matrice des cosinus directeurs

$$\begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0u} \\ r_{0v} \\ r_{0w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_{xu}) & \cos(\theta_{xv}) & \cos(\theta_{xw}) \\ \cos(\theta_{yu}) & \cos(\theta_{yv}) & \cos(\theta_{yw}) \\ \cos(\theta_{zu}) & \cos(\theta_{zv}) & \cos(\theta_{zw}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \equiv \mathbf{r_0} + \mathbf{C}_{\mathbf{XYZ}}^{\mathbf{UVW}} \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Où le vecteur $\mathbf{r_0} = \begin{pmatrix} r_{0u} & r_{0v} & r_{0w} \end{pmatrix}^T$ est la position de l'origine du système de références XYZ exprimée en coordonnées UVW.

r est un point dans l'espace représenté par les vecteurs fixes r_{UVW} ou r_{XYZ}. v est un vecteur libre représenté par v_{UVW} ou v_{XYZ}. La matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{XYZ}}^{\mathbf{UVW}}$ réalise la rotation entre les deux systèmes coordonnés. r_0 est l'origine du système *XYZ* exprimé en référence *UVW*.

On peut obtenir la vitesse inertielle ou la position inertielle d'un repère par rapport à un autre en utilisant les formules suivantes :

$$\gamma = \frac{dV}{dt} \; avec \; \gamma \; vecteur \; accélération \; \gamma = \begin{matrix} \gamma x \\ \gamma y \\ \gamma z \end{matrix}$$

$$V \; vecteur \; vitesse \; \gamma = \begin{matrix} vx \\ vy \\ vz \end{matrix}$$

$$V = \frac{dP}{dt} \; avec \; P \; vecteur \; position \; P = \begin{matrix} Px \\ Py \\ Pz \end{matrix}$$

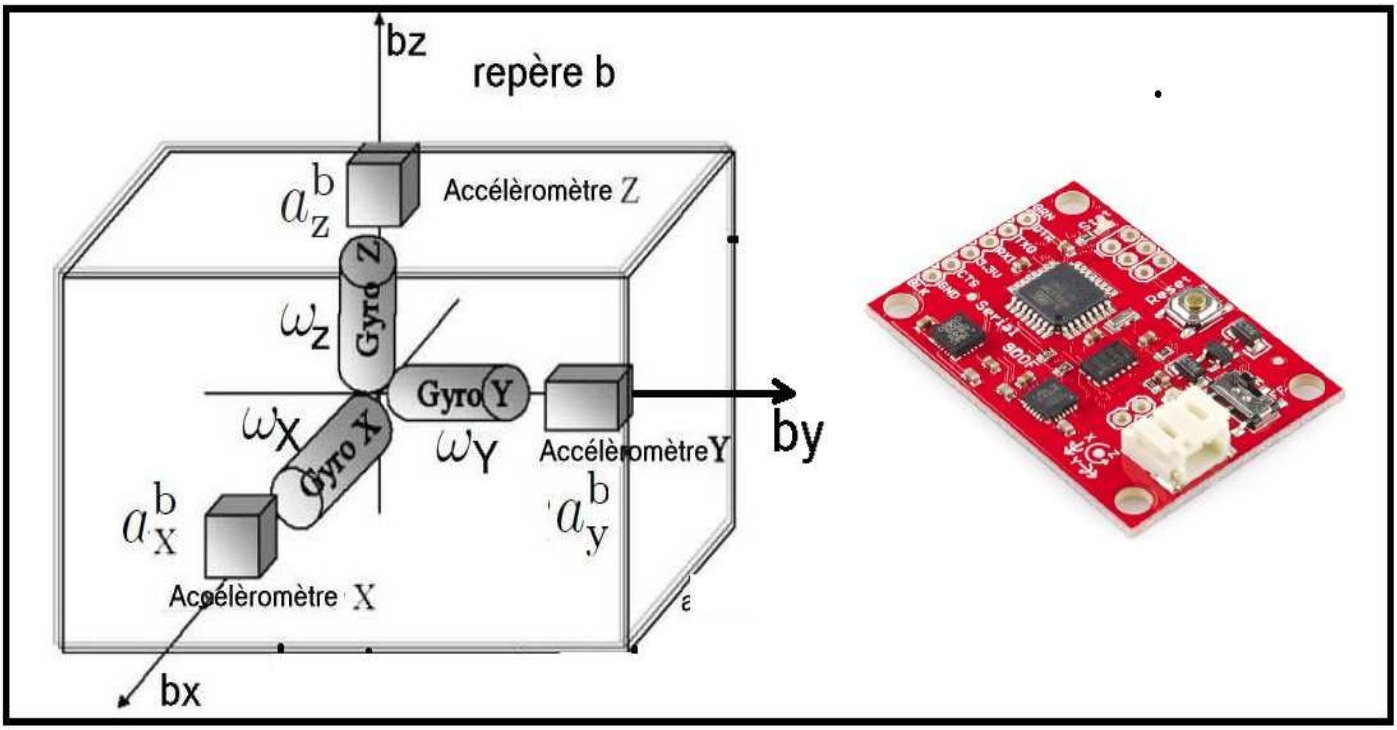
$$v \; vecteur \; vitesse \; V = \begin{matrix} vx \\ vy \\ vz \end{matrix}$$

$$P = \int V \, dt \quad et \quad V = \int \gamma \, dt$$

Un système de navigation inertielle est une unité de calcul qui permet d'obtenir la position la vitesse et l'attitude du véhicule. La vitesse et la position sont calculées par une simple et une double intégration à partir du vecteur accélération.

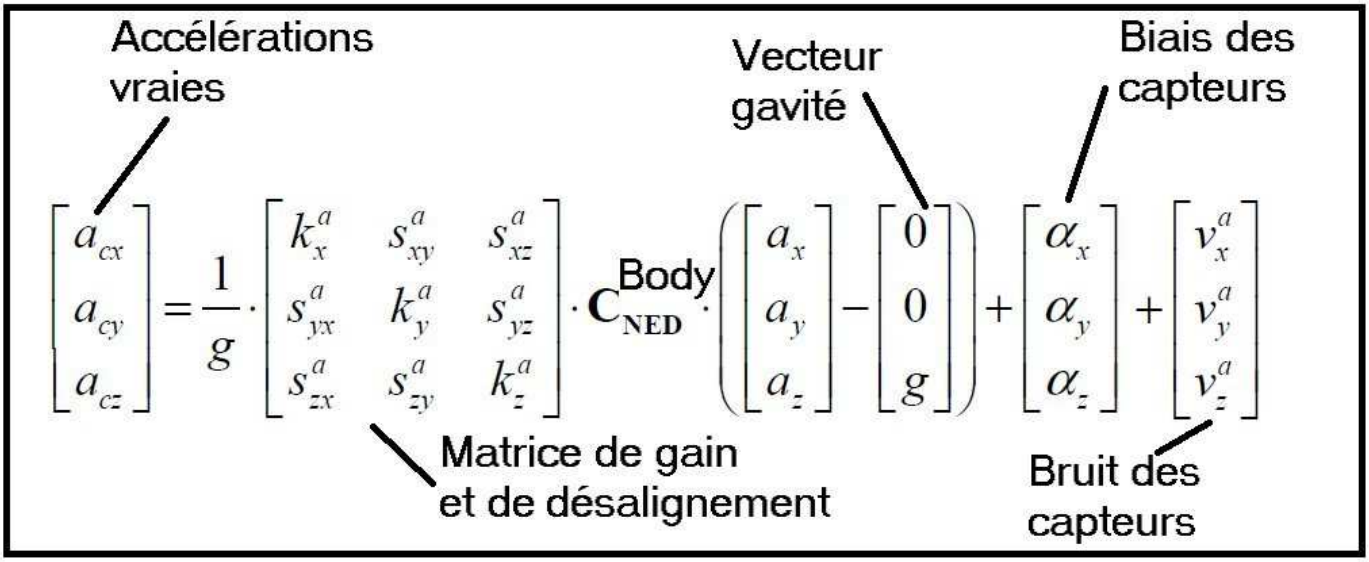
1.2) les mesures

Pour obtenir l'attitude la position et la vitesse inertielles on ne dispose que de la vitesse angulaire pour les 3 axes (gyromètres) et de l'accélération linéaire sur les 3 axes (accéléromètres). On retrouve ces différents capteurs dans l'IMU



1.2.1) Accéléromètre

L'accéléromètre mesure les accélérations dans le système de référence body. De par sa conception physique, il détecte aussi la force de la gravité comme une accélération $g = 9.81 m.s^{-2}$ vers le haut. Il a des très bonnes performances dynamiques, mais par contre, il a besoin de calibrage. Le biais et l'erreur de gain n'étant pas négligeables, ils peuvent facilement être déterminés et compensés, car ils restent bien stables. L'équation de mesure qui contient toutes ces indéterminations est donnée par :



$$\begin{bmatrix} a_{cx} \\ a_{cy} \\ a_{cz} \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \cdot \begin{bmatrix} k_x^a & s_{xy}^a & s_{xz}^a \\ s_{yx}^a & k_y^a & s_{yz}^a \\ s_{zx}^a & s_{zy}^a & k_z^a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{NED}}^{\mathbf{Body}} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x^a \\ v_y^a \\ v_z^a \end{bmatrix}$$

Les grandeurs à gauche de l'égalité correspondent aux données fournies (soit les sorties) ; La diagonale de la matrice représente les gains capteurs pour chacun des axes de mesure ; les termes hors la diagonal sont les désalignements et couplages entre composantes ; les deux vecteurs accélération et champ gravitationnel sont pré multipliés par la matrice de cosinus ; les grandeurs en lettres grecques sont les biais.

1.2.2) Gyromètre

Le gyromètre mesure des vitesses angulaires dans le système de références body. Il possède aussi des très bonnes performances dynamiques, mais cette fois les incertitudes statiques ne peuvent pas être pré-calibrées : le biais souffre d'une dérive temporelle importante qui dépend de plusieurs facteurs lourds à modéliser. Le gain peut être déterminé à priori et compensé pendant le vol. L'équation de mesure qui contient toutes ces indéterminations est donnée par :

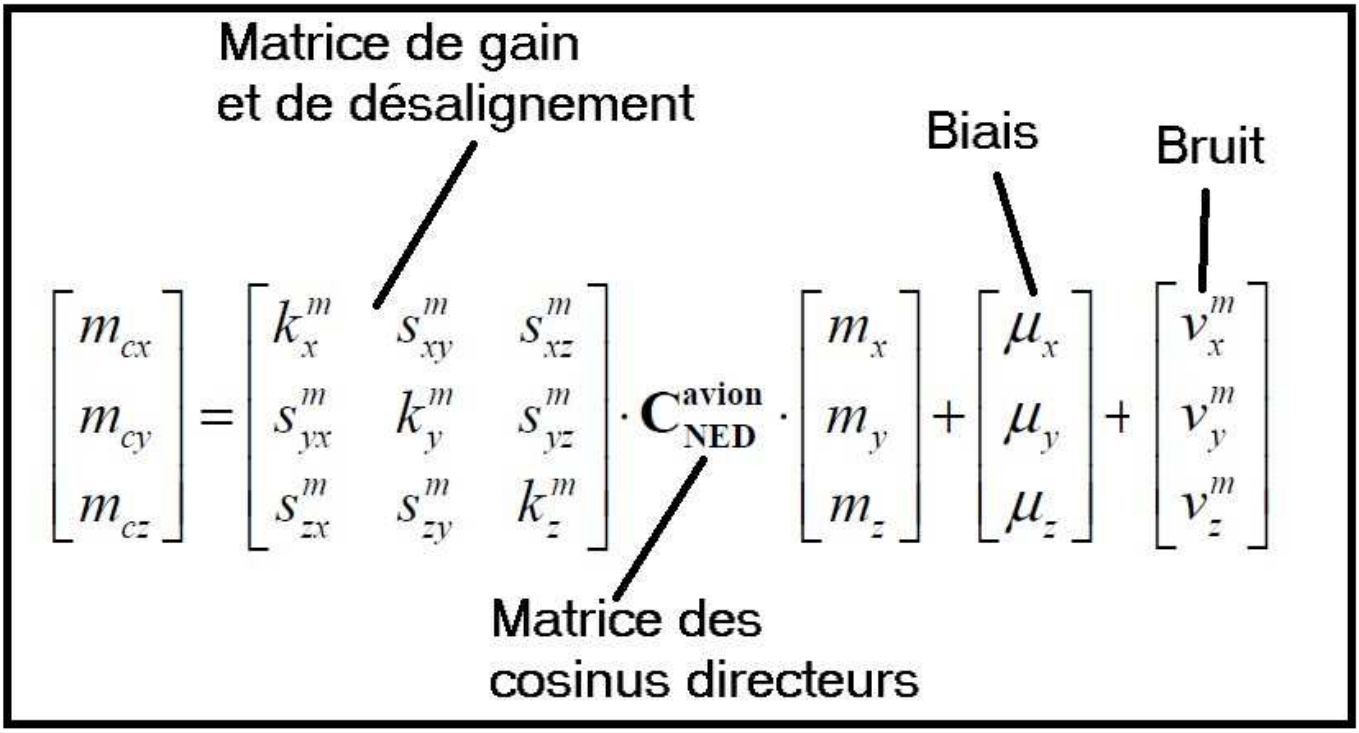
$$\begin{bmatrix} p_c \\ q_c \\ r_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p^g & s_{pq}^g & s_{pr}^g \\ s_{qp}^g & k_q^g & s_{qr}^g \\ s_{rp}^g & s_{rq}^g & k_r^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_p \\ \gamma_q \\ \gamma_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_p^g \\ v_q^g \\ v_r^g \end{bmatrix}$$

La notation est analogue aux notations précédentes. La matrice de cosinus n'apparaît pas car le vecteur (*p, q, r*) représentant les trois vitesses angulaires est déjà exprimé en référence avion.
Le calibrage de ce capteur se rend assez difficile car ces incertitudes ne sont pas invariantes dans le temps. Le désalignement doit se déterminer une fois et rester fixe. Les gains pourront encore être fixés par calibrage.

On peut pour améliorer la précision de l'INS utiliser un récepteur GPS ou un magnétomètre.

1.2.3) Le magnétomètre

Le magnétomètre mesure le champ magnétique dans le système de références body Ses performances dynamiques ne sont pas aussi bonnes que celles des accéléromètres ou des gyromètres. Il fournit des données beaucoup moins rapidement.



$$\begin{bmatrix} m_{cx} \\ m_{cy} \\ m_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x^m & s_{xy}^m & s_{xz}^m \\ s_{yx}^m & k_y^m & s_{yz}^m \\ s_{zx}^m & s_{zy}^m & k_z^m \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{NED}}^{\mathbf{avion}} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x^m \\ v_y^m \\ v_z^m \end{bmatrix}$$

Par rapport aux performances statiques, ce capteur a besoin de calibrage : le biais et l'erreur de gain n'étant pas négligeables, ils peuvent facilement être déterminés et compensés, car ils restent bien stables. Ce calibrage doit être effectué avec le capteur et tous les autres dispositifs embarqués pour tel de compenser les déviations du champ magnétique qu'ils peuvent créer. L'équation de mesure statique qui contient toutes ces indéterminations est donnée par :

m = (m_x, m_y, m_z) étant le champ magnétique terrestre local dans la zone ou se trouve le body.

Le capteur à une procédure propre de calibrage qui détermine les gains et les biais les plus adaptés peur obtenir des mesures de champ magnétique

1.2.4) Le récepteur GPS

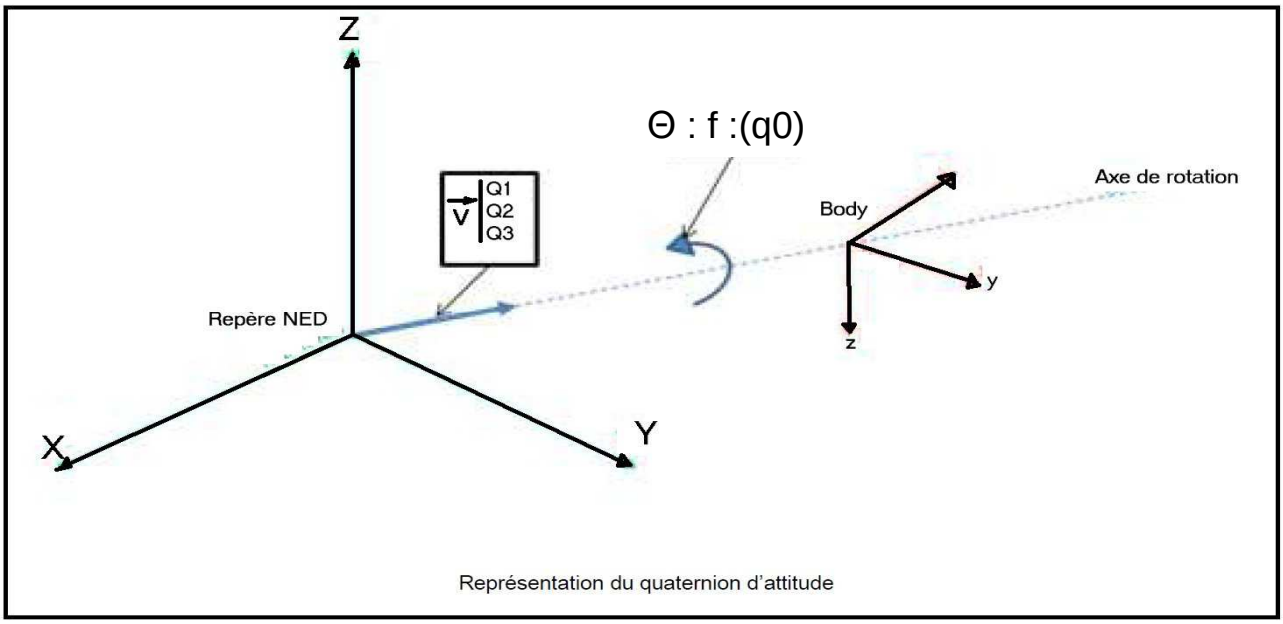
La constante évolution de la technologie GPS a permis la construction des récepteurs de plus en plus miniaturisés. On est capable maintenant d'incorporer ces mesures de localisation absolues dans les systèmes de navigation et de pilotage automatiques pour des avions aussi petits que des drones, qui étaient il y a peu de temps limités aux solutions purement inertielles. Mais la grande popularité des performances GPS est un peu dangereuse : d'un coté, la précision peut s'avérer insuffisante dans certaines applications ; de l'autre, le débit de sortie d'un jeu de mesures par seconde le rend aussi insuffisant pour des déplacements rapides.

1.3) Les traitements de données de l'INS

1.3.1) La direction et le quaternion

Le quaternion est un vecteur à Quatre composantes qui représente le changement de direction que va prendre notre mobile du repère NED (phase d'initialisation) au repère body.

$$Q = \begin{matrix} Q0 \\ Q1 \\ Q2 \\ Q3 \end{matrix}$$



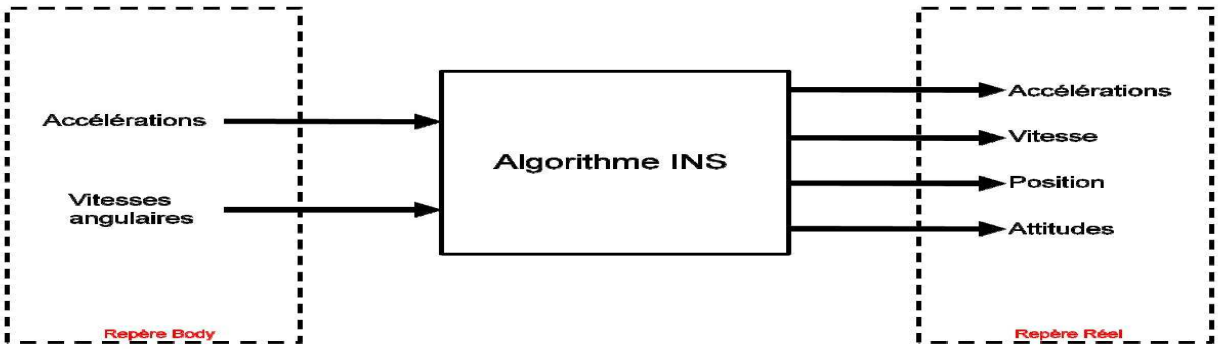
Représentation du quaternion d'attitude

Le quaternion q ayant pour coordonnées (q0, q1, q2, q3) représente une rotation d'angle θ

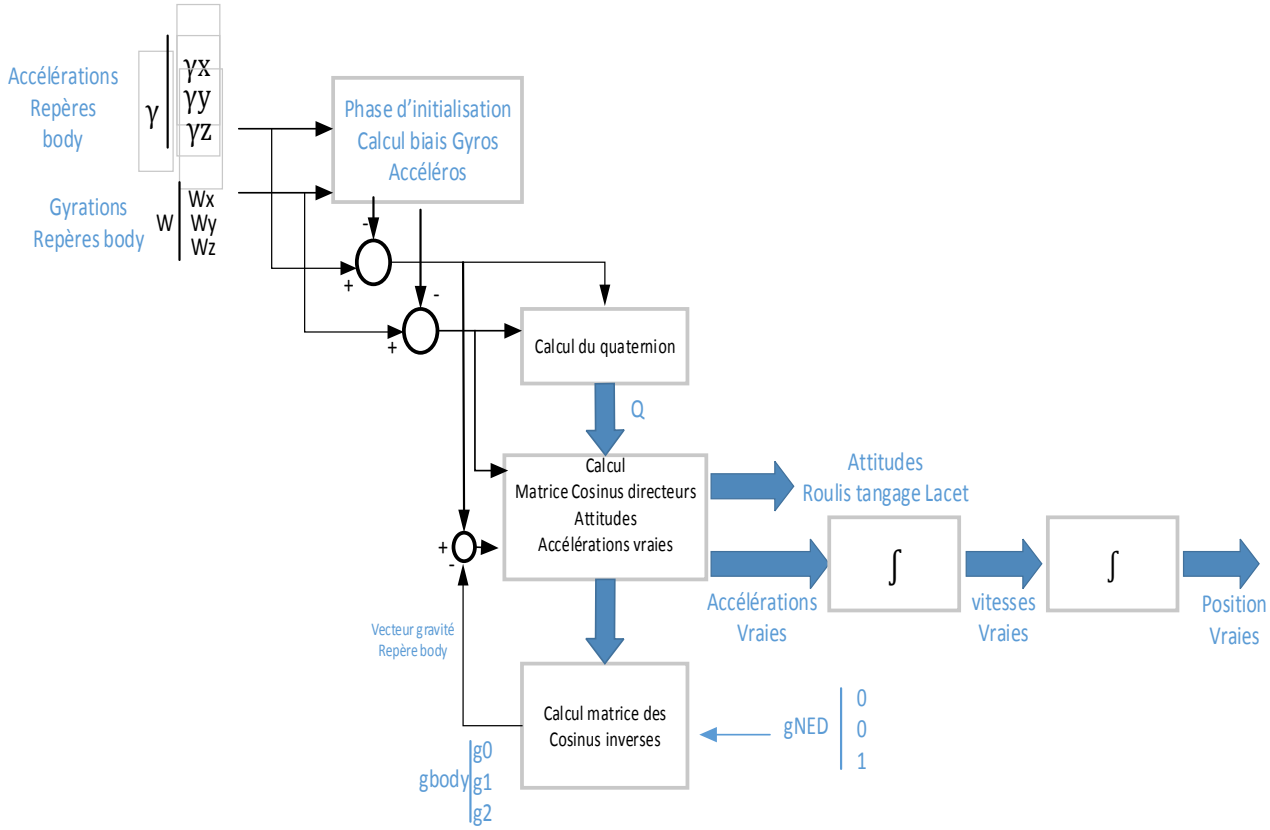
Q= (cos θ/2, α. Sin θ/2, β. Sin θ/2, ***Γ*** Sin θ/2)

Le vecteur V représente la direction de l'axe de rotation du repère body par rapport au repère NED
Les quaternions vont nous permettre de calculer simplement les données inertielles par des opérations linéaires.

1.3.2) L'algorithme INS



L'objectif de cet algorithme est double. Il s'agit, d'une part, de fournir les informations d'attitudes du mobile référencées par rapport au repère Réel et, d'autre part, de transformer les informations provenant des capteurs accélérométriques en données intégrables dans le repère réel.



1.3.3) Calcul de la direction du repère BODY ou du quaternion:

Le quaternion d'attitude de la partie mobile évolue en fonction des vitesses angulaires mesurées par le gyromètre. Cette évolution obéit à l'équation suivante :

$$Qk+1 = Qk + \frac{1}{2} \times Te \times \Omega k \times Qk$$

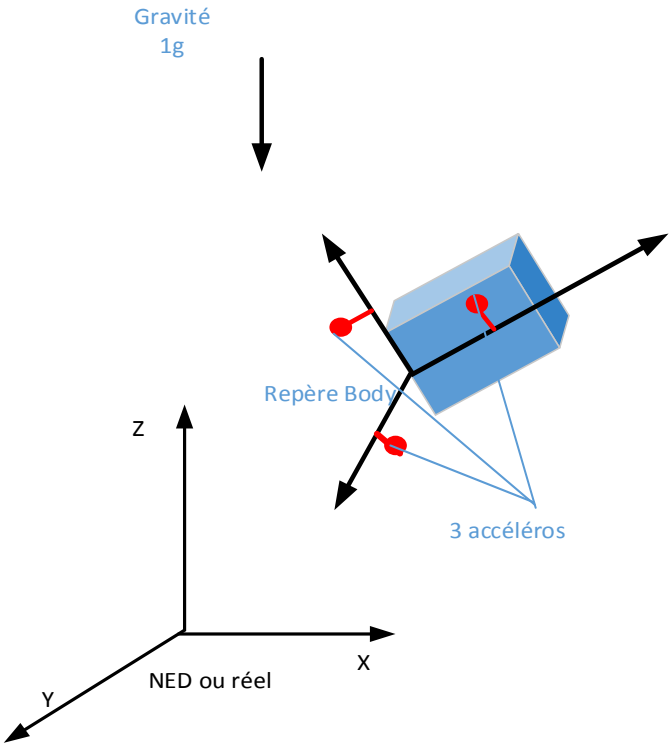
$$Qk+1\ Quaternion\ \text{à}\ l'instant\ k+1$$
$$Qk\ Quaternion\ \text{à}\ l'instant\ k$$
$$\Omega k : Matrice\ vitesse\ angulaire$$

Avec :
Te: La période d'échantillonnage des informations gyro ;

$$\Omega k = \begin{matrix} 0 & -wx & -wy & -wz \\ wx & 0 & wz & wy \\ wy & -wz & 0 & wx \\ wz & wy & -wx & 0 \end{matrix}$$

Wk : les vitesses angulaires mesurées par les gyromètres respectivement placés sur les axes X, Y et Z.
Les biais et les bruits engendrés par les gyromètres sont une grande source d'erreurs pour le calcul du quaternion. Afin d'améliorer ce calcul, il nous faut de nouvelles observations qui seront prises en compte dans un estimateur. L'estimateur de Kalman est l'un des plus connu mais très gourmand en ressource processeur. Un estimateur plus simple baptisé filtre d'attitude a été développé par M Madgwick.

Ce procédé reprend le principe de fusion de donnée. Ici, nous fusionnons les données gyromètriques et accéléromètriques dans un même algorithme. L'accéléromètre 3 axes du MPU6050 mesure en permanence le champ gravitationnel terrestre (orienté selon l'axe Zénith/Nadir) qui indique la verticale du lieu

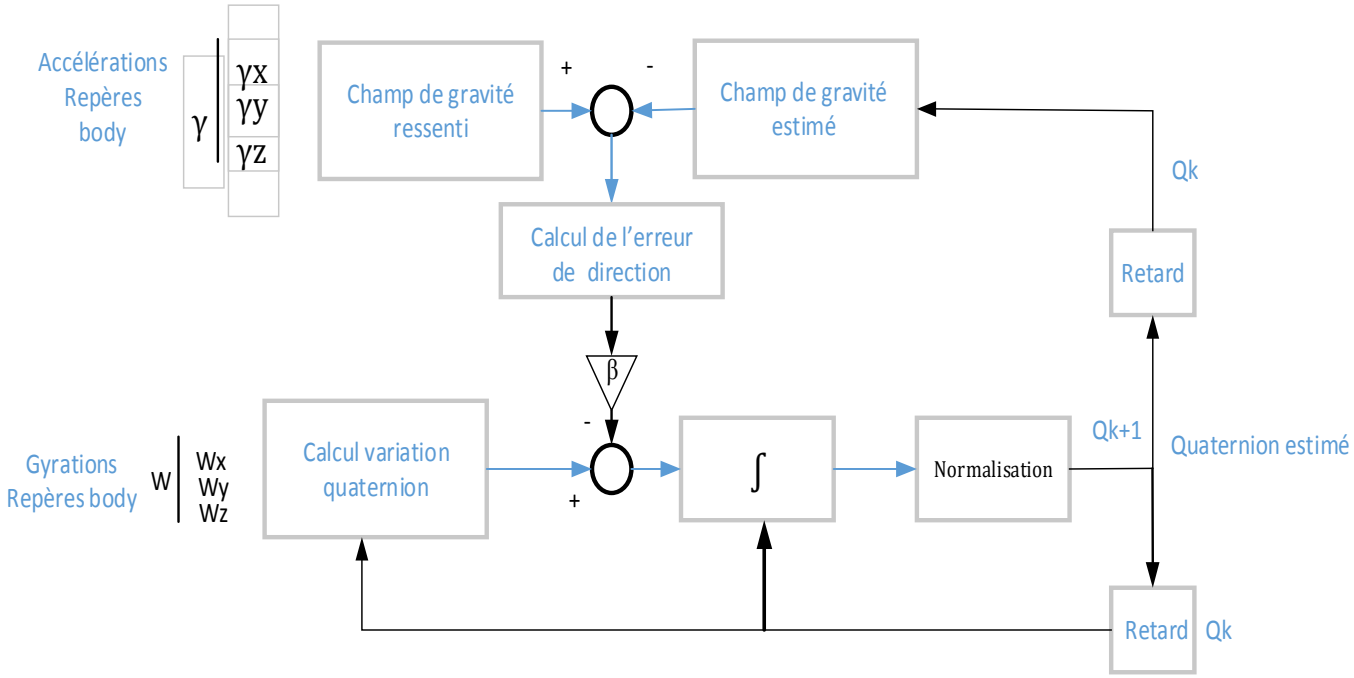


. En comparant les coordonnées de ce champ avec celles du champ gravitationnel calculé par le filtre, l'algorithme est capable de déterminer un écart qui, après une conversion dans l'espace dimensionnel du quaternion sera pondéré par un gain β et définira le taux de correction final du quaternion d'attitude. Ce gain compte les restrictions suivantes :

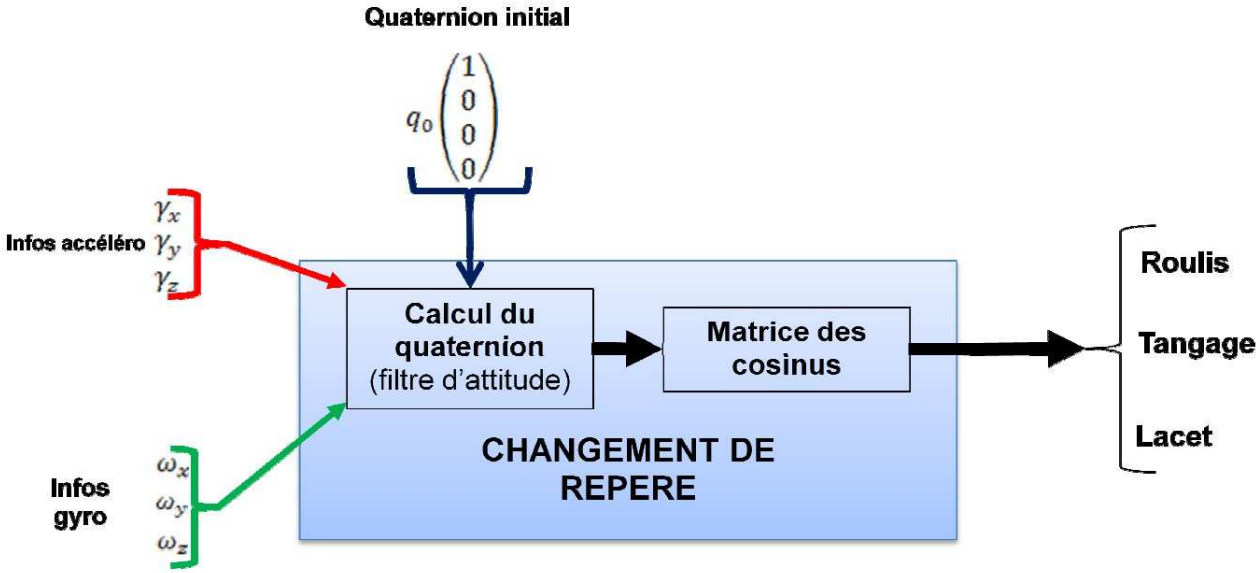
β Si le gain est trop fort alors les attitudes seront bruitées et on verra sur les indicateurs un tremblement parasite

β Si le gain est trop faible, les attitudes seront soumises au phénomène de dérive.

Le schéma bloc suivant montre l'implémentation complète du filtre d'attitude



Le filtre permettra également, grâce à la comparaison des deux champs gravitationnels, d'aligner dès le démarrage la plateforme avec la verticale locale.



Principe du calcul des attitudes

Ce quaternion filtré permettra de calculer à chaque instant une matrice des cosinus directeurs relativement fiable permettant non seulement de déterminer les attitudes de la partie mobile mais également de transposer les accélérations du repère Body (le repère de mesure) au repère au repère réel (le repère d'intégration).
La matrice des cosinus directeurs est obtenue à partir du quaternion d'attitude. Cette transformation s'effectue grâce à l'équation suivante :

$$C_{Réel}^{Body} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 2.(q_1.q_2 - q_0.q_3) & 2.(q_1.q_3 - q_0.q_2) \\ 2.(q_1.q_2 + q_0.q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2.(q_2.q_3 - q_0.q_1) \\ 2.(q_1.q_3 + q_0.q_2) & 2.(q_2.q_3 + q_0.q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Avec :

- $C_{Réel}^{Body} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$: la matrice des cosinus directeurs ;
- $q_k \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$: le quaternion calculé à l'instant k.

1.3.4) Calcul des informations d'attitude:

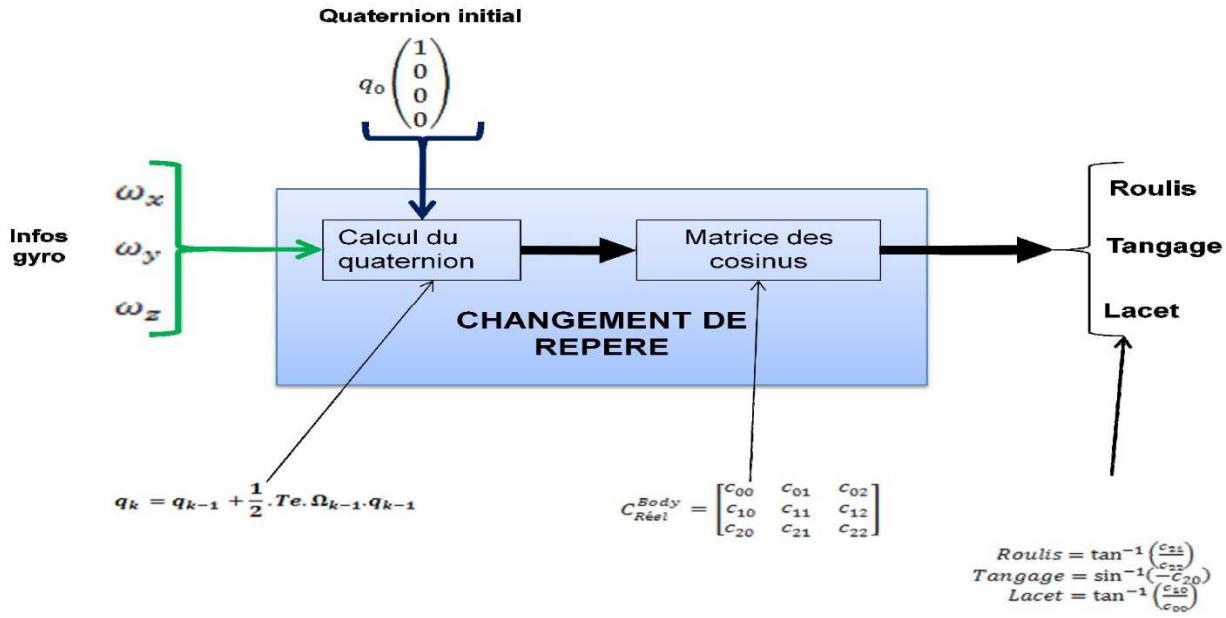
• Principe et contraintes associées

Les données d'entrées utilisées pour obtenir les attitudes proviennent des gyromètres (vitesses angulaire exprimées en °/s) placées sur chaque axe du repère Body.
Calculer ces attitudes revient à déterminer les rotations nécessaires pour passer du repère Body au repère Réel. Il s'agit donc d'effectuer un changement de repère.
Le schéma bloc suivant illustre le principe général de calcul des attitudes



Principe général du calcul des attitudes

Les quaternions fournissent une notation mathématique commode pour représenter l'orientation et les rotations des objets fréquemment utilisés dans les applications de navigation mais aussi en infographie, robotique et mécanique spatiale des satellites
Dans notre application, le quaternion à un instant t est l'image de la rotation par rapport au repère Réel.
L'orientation du repère Body évoluant au cours du temps, il va falloir être capable de déterminer l'évolution du quaternion dans le temps. Cette évolution peut être obtenue grâce aux mesures de vitesses angulaires des gyromètres de la plate-forme
Une fois le calcul du quaternion réalisé, nous pouvons obtenir, par simple transformation linéaire, la matrice de changement de repère, également appelée « matrice des cosinus directeurs ».
De cette matrice, il devient simple de déduire les attitudes. Ce procédé est résumé dans le schéma suivant :



De cette matrice, il devient simple d'extraire les informations d'attitude :

- $Roulis = \tan^{-1}\left(\frac{c_{21}}{c_{22}}\right)$
- $Tangage = \sin^{-1}(-c_{20})$
- $Lacet = \tan^{-1}\left(\frac{c_{10}}{c_{00}}\right)$

1.3.5) Elaboration des informations de vitesse et de déplacement

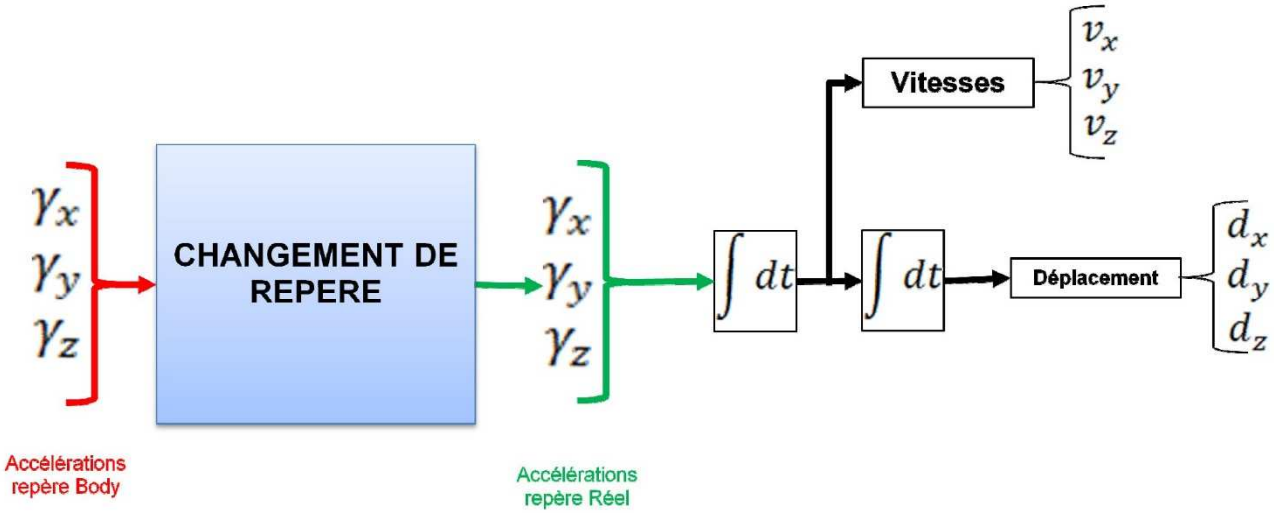
Principe et contraintes associées

Nous avons vu précédemment (dans que les accélérations telles qu'elles étaient ressenties par l'accéléromètre 3 axes du MPU6050 ne pouvaient être l'image du déplacement de la partie mobile. Pour obtenir des mesures d'accélérations reflétant le mouvement réel, les accélérations doivent être transposées du repère Body vers le repère Réel (le repère d'intégration).

Cependant, avant d'effectuer cette transposition, il faut s'assurer que les mesures d'accélérations soient nettoyées de toutes sollicitations autres que celles causées par le déplacement. Dans notre projet, ces accélérations parasites ont deux origines

- Les biais d'accéléromètres
  Ils devront être soustraits aux accélérations mesurées **avant la transposition dans le repère réel**
- Le champ de gravité : ce champ serait une source d'erreur importante s'il rentrait dans la série d'intégration utilisé pour le calcul de vitesse et de déplacement. L'algorithme doit donc pouvoir le soustraire aux accélérations mesurées

Une fois les accélérations transposées dans le repère réel, il ne reste plus qu'à intégrer une première fois les accélérations pour obtenir les vitesses puis intégrer ces vitesses pour obtenir les déplacements selon les trois axes.
La prise en compte de ces contraintes abouti au diagramme suivant :



Principe de calcul des informations de vitesses et d'accélérations

La transposition des accélérations du repère Body au repère réel
Le changement de repère se fait par l'intermédiaire de la matrice des cosinus directeurs décrite dans la fonction d'élaboration des informations d'attitudes. Il suffit d'effectuer la multiplication du vecteur accélération du repère Body par cette matrice pour obtenir un vecteur accélération transposé dans le repère Réel.

Le passage des accélérations du repère Body au repère réel ce fait en multipliant les mesures accélérométriques (prises dans le repère Body) par la matrice des cosinus

$$\gamma_{Réel} = C_{Body}^{Réel} \times \gamma_{Body} = \begin{bmatrix} C_{00} \cdot \gamma_x + C_{00} \cdot \gamma_y + C_{00} \cdot \gamma_z \\ C_{10} \cdot \gamma_x + C_{11} \cdot \gamma_y + C_{12} \cdot \gamma_z \\ C_{20} \cdot \gamma_x + C_{21} \cdot \gamma_y + C_{22} \cdot \gamma_z \end{bmatrix}$$

Avec :

- $\gamma_{Réel} \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix}_{Réel}$: le vecteur accélération transposé dans le repère réel ;
- $\gamma_{Body} \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix}_{Body}$: le vecteur accélération ressenti par l'accéléromètre ;
- $C_{Body}^{Réel} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$: La matrice des cosinus directeurs calculé dans la fonction « attitude ».

Comme nous l'avons dit plus haut, le vecteur champ de gravité doit être soustrait à chaque composante de l'accélération ressenti. Cet ajustement doit bien entendu être opéré avant la transposition des accélérations dans le repère réel. Nous devons donc calculer les coordonnées du champ de gravité dans le repère Body.

Nous connaissons l'orientation du champ de gravité dans le repère réel. Celui-ci a pour coordonnées: $\vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Réel}$ .Pour obtenir les coordonnées du vecteur gravité dans le repère Body, il suffit simplement de multiplier celui-ci par l'inverse de la matrice des Cosinus directeurs. L'équation permettant de passer du repère est :

$$g_{Body} = \left(C_{Body}^{Réel}\right)^{-1} \times g_{Body}$$

Avec :

- $\vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Réel}$ **:** le vecteur gravité dans le repère réel ;
- $\vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Body}$: le vecteur gravité dans le repère réel ;
- $\left(C_{Body}^{Réel}\right)^{-1}$: la matrice des cosinus inverse.

Dès lors, et si on a procédé à la calibration de ’accéléromètre, les accélérations transposées dans le repère Réel sont l’image du déplacement de la partie mobile. Le schéma suivant résume les procédés participant au changement de repère

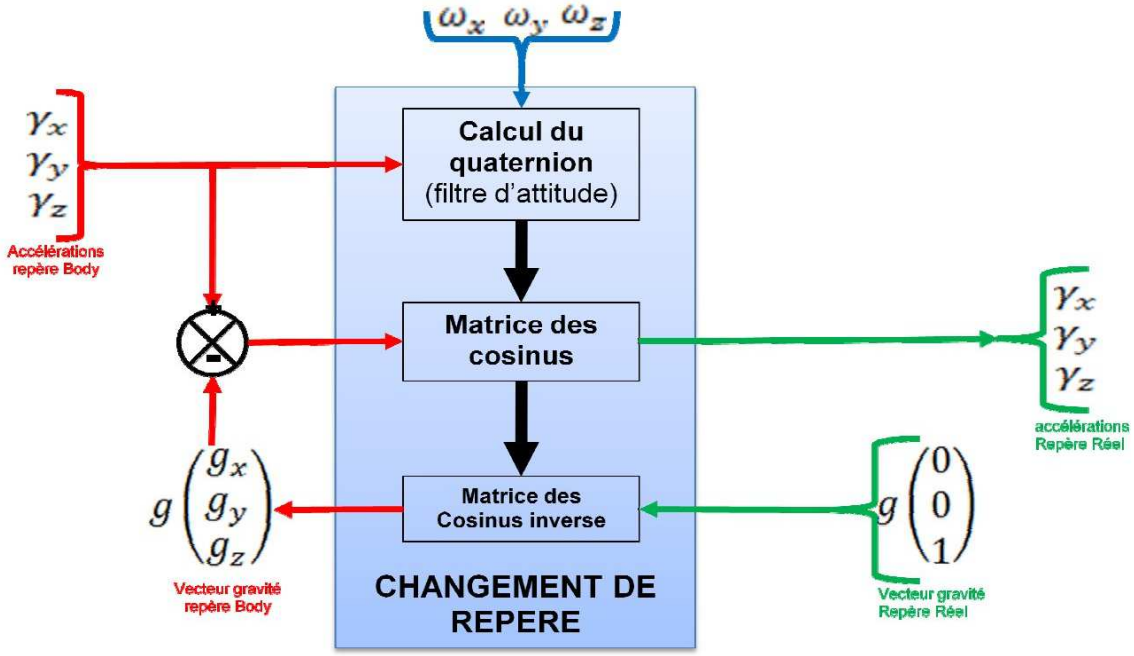


Schéma bloc de la transposition des accélérations